Lezione 13dicembre2022

martedì 13 dicembre 2022 10:33

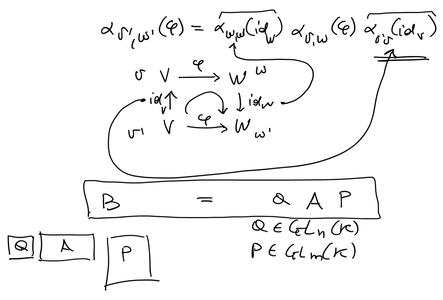
FORME CANONICHE DI MATRICI

$\varphi : V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \in M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$ "n,m"

$\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ basi di V, W

cambiando base, cambia matrice:

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}'}(\varphi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(id_W)\ \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\ \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id_V)$$



domande:

① come scegliere basi di V e W in modo che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ sia "semplice"

② $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, trovare $Q, P \in GL$ tali che QAP sia "semplice"

Definizione: $A \simeq B$ (equivalente) $\Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{K}) : B = QAP$, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ ($A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$)

Note: $\simeq$ è relazione di equivalenza tra matrici cioè
- $A \simeq A$
- $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$
- $A \simeq B$, $B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

Problema della classificazione:
studiare il insieme quoziente $M_{n,m}(\mathbb{K})/\simeq$
descrivere le classi di equiv.
per ogni classe trovare il rappr. della semplice possibile

Teorema (classificazione per equivalenza):

Sia $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$
allora $A \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove $r = rg(A)$
"presento la forma identica"

dunque $A \simeq B$ sse $rg(A) = rg(B)$

dunque $M_{n,m}(\mathbb{K})/\simeq \ \leftrightarrow \{0, 1, 2, \dots, \min(n,m)\}$
$A \mapsto rg(A)$

usando $A \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq B$ dunque $A \simeq B$

ovvio!

Esempi:
- $[0]_\simeq = \{0\}$
- $[\mathbb{1}_n]_\simeq = \{QAP \dots\} = \{$tutte le matrici invertibili$\}$
- $[\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}]_\simeq = \{$tutte matrici rango 1$\}$

Modifichiamo $A \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \to A \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in due modi diversi:

① Usando Gauss

$$A \xrightarrow{\text{righe}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{colonne}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= QA$ $= (QA)P$

② $\varphi : V \to W$ $\quad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V = V' \oplus \ker(\varphi)$ (base $\mathcal{V}$: $v_1 \dots v_r$ | $v_{r+1} \dots v_n$; r = rango, m = ker)

base W: $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r), w_{r+1} \dots w_n$ $\leftarrow \mathcal{W}$
(vettori W | completato base W)

allora $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

perché
$\varphi(v_1) = w_1 = 1 w_1 + 0 w_2 + \dots 0$
$\varphi(v_2) = w_2 = 0 w_1 + 1 w_2 + \dots 0$
$\vdots$

Problemi:

$A \underset{s}{\simeq} B$ sse $B = QA$ $Q \in GL$

$A \underset{d}{\simeq} B$ sse $B = AP$ $P \in GL$
(equivalenza destra)

equivalenza finale

Stesso relazioni di equiv. (rifl, simm, trans?) se si descrive $M_{n,m}(\mathbb{K})/\underset{s}{\simeq}$ $M_{n,m}(\mathbb{K})/\underset{d}{\simeq}$

$\varphi : V \to V$

$\mathcal{V}$ base V $\quad \alpha_{\mathcal{V}}(\varphi) = A$

$\mathcal{V}'$ base V $\quad \alpha_{\mathcal{V}'}(\varphi) = B = H^{-1}AH$, $H = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id)$

Definizione: $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B \Leftrightarrow \exists H \in GL_n(\mathbb{K}) : B = H^{-1}AH$

simile in $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ A e B rappr. la stessa funzione lineare in 2 basi diverse

Note: $\underset{\mathbb{K}}{\sim}$ è relazione di equivalenza (rifl., simm., transitiva: facile)

$A \sim A$ $\quad A = \mathbb{1} A \mathbb{1}$

$A \sim B$ $\quad B = H^{-1}AH$ $\quad A = HBH^{-1} = K^{-1}BK$ $\quad B \sim A$

$A \sim B$, $B \sim C$ $\quad B = H^{-1}AH$ $\quad C = K^{-1}BK = K^{-1}(H^{-1}AH)K = (HK)^{-1}A(HK)$ $\quad A \sim C$

Problema studiare $M_n(\mathbb{K})/\underset{\mathbb{K}}{\sim}$ (difficile).

Note: relazione tra equivalenza e similitudine?

$A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B \to A \simeq B$
($B = H^{-1}AH \Rightarrow B = QAP \Rightarrow A \simeq B$; $Q = H^{-1}$, $P = H$)

esempio:
- $[\mathbb{1}_n]_\sim = GL_n(\mathbb{K})$
- $[\mathbb{1}_n]_\sim = \{H^{-1}\mathbb{1}H \mid H \in GL_n(\mathbb{K})\} = \{\mathbb{1}_n\}$
- $[\alpha \mathbb{1}_n]_\sim = \{\alpha \mathbb{1}_n\}$
- $S : S^2 = \mathbb{1}_n$ $\quad [S]_\sim = [\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & \\ & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}]_\sim = \{\dots\}$

Il problema di similitudine è piuttosto difficile, usiamo tecniche molto astute, e studiamo alcuni casi speciali:

A è TRIANGOLARIZZABILE su $\mathbb{K}$ se $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ sse $\exists H \in GL_n(\mathbb{K})$: $H^{-1}AH$ triangolare

A è DIAGONALIZZABILE su $\mathbb{K}$ se $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ sse $\exists H \in GL_n(\mathbb{K})$: $H^{-1}AH$ DIAGONALE

e ci interessiamo anche dei CRITERI per capire se una matrice è triang. o diagonalizz.

- Autovalori → Pol. caratt. matrice → triangolarizz. → Criterio diagonal.
- Teoria Hamilton Cayley → Pol. minimo → Il criterio diag.
- Teoria Jordan → forma triangolare più semplice possibile

Idea: se $\alpha_{\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$

allora deve esistere $v \in V$: $\varphi(v) = \alpha v$

Se capita: α è AUTOVALORE di φ
$v \neq 0$ è AUTOVETTORE di φ di autovalore α

Problema: riusciamo a trovare autovalori/autovettori di φ?

Si tratta di un problema non lineare perché se moltiplico per uno scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ anche αv è autovettore:

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Però:
$\varphi(v) = \alpha v$
$\varphi(v) - \alpha\, id(v) = 0$
$(\varphi - \alpha\, id)(v) = 0$ con $v \neq 0$

$\ker(\varphi - \alpha id_V) \neq 0$ perché contiene $v \neq 0$

sse $\det(\varphi - \alpha id_V) = 0$

$\det(\varphi - X id) = 0$ $\quad \det(A - X\mathbb{1}_n) = 0$ $\quad (A - X\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} - X \end{pmatrix}$

polinomio nella X, di grado n; gli α cercati sono gli zeri di questo!

Morale: troviamo gli autovalori $\alpha \in \mathbb{K}$ come zeri di un polinomio — non lineare
e poi gli autovettori di α come $\ker(\varphi - \alpha id)$ — lineare.

13/12/2022

Strategia: cerchiamo AUTOVALORI e AUTOVETTORI per endomorfismi/matrici quadrate!

$\varphi(v) = \alpha v \Leftrightarrow (\varphi - \alpha id)(v) = 0$ $\quad v \neq 0$
$v \neq 0$ AUTOVALORE $\Leftrightarrow \ker(\varphi - \alpha id) \neq 0$
AUTOVETTORE (EIGENVECTOR) $\Leftrightarrow \det(\varphi - \alpha id) = 0$

Questo dice come cercare gli autovalori: widiamo teoremi che descrivono gli autovettori

Def: $\varphi \in End(V)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$:

$P_A(X) = \det(X\mathbb{1}_n - A) \in \mathbb{K}[X]$
$P_\varphi(X) = \det(X id - \varphi)$ polinomio in X

Si dice POLINOMIO CARATTERISTICO di φ o di A.

Teo: autovalori di $\varphi \equiv$ zeri del $P_\varphi(X)$

SPETTRO di $\varphi := \{$autovalori di $\varphi\}$

Nota: trovati gli autovalori α di A, possiamo cercare gli autovettori di α risolvendo il sistema lineare $\ker(A - \alpha\mathbb{1}_n)$ cioè $(A - \alpha\mathbb{1}_n)\underline{X} = \underline{0}$

Esempi:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = |X\mathbb{1} - A| = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-4) - 4 = X^2 - 5X + 4 - 4 = X(X-5)$

autovalori: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 5$

autovettori di 0: $\ker(A - 0\mathbb{1}) = \ker(A) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

" di 5: $\ker(A - 5\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

morale: nella base $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{K}^2$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ diagonale! $H^{-1}AH$ //

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \left|\begin{pmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}\right| = (X-2)^3$

autovalori: solo $\alpha = 2$ (molteplicità 3)

autovettori: $\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

non ci sono abbastanza autovettori per fare una base dello spazio $\mathbb{K}^3$!
$\Rightarrow$ questa matrice non è diagonalizzabile (in nessun $\mathbb{K}$).

Proprietà del polinomio caratteristico:

$A \in M_n(\mathbb{K})$: $P_A(X) := \det(X\mathbb{1} - A) \in \mathbb{K}[X]$

① $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$ allora $P_A(X) = P_B(X)$ "il pol. car. è invariante sulla classe di similitudine"

$B = H^{-1}AH$
$P_B(X) = |X\mathbb{1} - B| = |X\mathbb{1} - H^{-1}AH| = |H^{-1}(X\mathbb{1})H - H^{-1}AH| = |H^{-1}(X\mathbb{1} - A)H| = |H^{-1}|\,|X\mathbb{1} - A|\,|H| = P_A(X)$

$A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B \Rightarrow P_A(X) = P_B(X)$ $\not\Leftarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\underset{\mathbb{K}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P(X) = (X-1)^2$, $\ker(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathbb{1}_2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

② $P_A(X) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & -a_{2n} \\ -a_{n1} & & X - a_{nn} \end{vmatrix} = X^n + (\ )X^{n-1} + (\ )X^{n-2} + \dots + (\ )X + (\ )$

- è polinomio MONICO di grado n
- termine noto? $P_A(0) = \det(-A) = (-)^n \det(A)$
- coeff di X^{n-1}? viene solo da $\prod(X - a_{ii}) = X^n + X^{n-1}(-a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn}) = -\sum a_{ii}$

DEF $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ TRACCIA di A.
$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

- altri coefficienti?

Esempi:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = |X\mathbb{1} - A| = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-4) - 4 = X^2 - 5X + 4 - 4 = X(X-5)$

autovalori: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 5$

autovettori di 0: $\ker(A - 0\mathbb{1}) = \ker(A) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

" di 5: $\ker(A - 5\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

morale: nella base $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{K}^2$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ diagonale! $H^{-1}AH$ //

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \left|\begin{pmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}\right| = (X-2)^3$

autovalori: solo $\alpha = 2$ (molteplicità 3)

autovettori: $\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

non ci sono abbastanza autovettori per fare una base dello spazio $\mathbb{K}^3$!
$\Rightarrow$ questa matrice non è diagonalizzabile (in nessun $\mathbb{K}$).

CRITERIO BANALE di DIAGONALIZZABILITÀ

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ ($\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$) è diagonalizzabile sse esiste una base di autovettori per A (per φ).

Supponiamo che A abbia $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ autovalori DISTINTI, allora A è diagonalizzabile.

Infatti: per ogni autovalore α_i scelgo un autovettore v_i ($\varphi(v_i) = \alpha v_i$, $v_i \neq 0$) e mostro che $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip (BASE!):

Se $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$
applico φ: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$
" φ^2: $\alpha_1^2 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \dots + \alpha_n^2 v_n = 0$
$\vdots$
" φ^{n-1}: $\alpha_1^{n-1} v_1 + \alpha_2^{n-1} v_2 + \dots + \alpha_n^{n-1} v_n = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & & \alpha_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vdm, $\det \neq 0 \Rightarrow v_i = 0$ ↯

Conclusione autovettori relativi ad autovalori DISTINTI sono lin. indip.

CRITERIO di TRIANGOLARIZZABILITÀ:

$A \in M_n(\mathbb{K})$ allora A è triangol su $\mathbb{K}$ sse $P_A(X)$ si fattorizza su $\mathbb{K}[X]$ completamente (fattori primi), "ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$"

($\Leftarrow$) $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(X) = P_T(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$
quindi gli autov sono $a_i \in \mathbb{K}$.

($\Rightarrow$) due modi: o si ragiona sulle matrici, o si ragiona sulle funzioni lineari:

A $\quad P_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$

uso a_1, trovo v_1: $Av_1 = a_1 v_1$
costruisco una matrice invertibile $H = (v_1 \dots)$ completamento con vettori e_i

allora $H^{-1}AH = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$ $\quad \left|\begin{array}{c|c} X - a_1 & * \\ \hline 0 & X\mathbb{1} - A_1 \end{array}\right|$

e $P_A(X) = (X - a_1) P_{A_1}(X)$
ricorro: tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ (sono $a_2, a_3, \dots a_n$)

per induzione su n allora $A_1 \underset{\mathbb{K}}{\sim} \begin{pmatrix} a_2 & * \\ & \ddots \\ 0 & a_n \end{pmatrix} = T_1$

$K^{-1}A_1K = T$:

$H^{-1}AH = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & K^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} H^{-1}AH \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} a_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$

$= \left(\begin{array}{c|c} a_1 & * \\ \hline & K^{-1}A_1K \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & * \\ \hline 0 & T_1 \end{array}\right)$ TRIANGOLARE //

$L^{-1}AL$

14/12/2022