Lezione 12dicembre2022

lunedì 12 dicembre 2022 10:31

Riassunto

$\delta : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ volte}} \longrightarrow K$ n. lineare alt.

$n = \dim V$

$\text{n. lineare alt}(V,K) \xrightarrow{\sim} K$

$\delta \longmapsto \delta(v_1 \dots v_n)$

$(v_1 \dots v_n$ base $V)$

$\det(\varphi) = \dfrac{\delta(\varphi v_1 \dots \varphi v_n)}{\delta(v_1 \dots v_n)}$ non dipende da $\delta \neq 0$ e da $v_1 \dots v_n$ base scelte

dove $\varphi : V \to V$ dipende solo da φ.

$$\boxed{\det(A) = \det(\varphi_A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}}$$

funzione $M_n(K) \longrightarrow K$

tale che: multilin. colonne, alternante colonne, vale 1 su $\mathbb{1}_n$

$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$

$\det(id) = 1$

$\det : GL_n(K) \longrightarrow K^\times$ morfismo di GRUPPI MOLTIPL.

$(\det A = \det A^t)$

calcolo: $\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \prod a_i$

$\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i),i}$

se σ tale che $\sigma(i) > i$ allora dà 0

dunque contano solo le σ t.c. $\sigma(i) \le i \quad \forall i$

$\sigma(1) \le 1$, $\sigma(2) \le 2$, $\dots$

$\det \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)$

$a_{ij} = 0$ se $i > n_1$, $j \le n_1$

$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

se una permutazione σ:

$\sum_{\sigma : \sigma\{1 \dots n_1\} \subseteq \{1 \dots n_1\},\ \sigma\{n_1+1 \dots n\} \subseteq \{n_1+1 \dots n\}} = \left(\sum_{\sigma_1}\right)\left(\sum_{\sigma_2}\right)$

Determinante di Van der Monde:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

in particolare è $\neq 0$ sse $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$

è $= 0$ sse $x_i = x_j$ per qualche $i \neq j$

calcolo per induzione su n

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_n^2 - x_0 x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{II} - x_0 \mathrm{I}$

$\mathrm{III} - x_0 \mathrm{II}$

$\vdots$

riga $-x_0$ preced.

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ x_1(x_1 - x_0) & & x_n(x_n - x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_0) & & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i \neq 0} (x_i - x_0) \prod_{i \neq 1} (x_i - x_1) \cdots$$

$$= \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad //$$

$\det\left(\left(\dfrac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j}\right)$?

Alternante doppio di Cauchy

suggerimento: vedere 2×2, 3×3,

poi: ogni riga − ultima

ogni colonna − ultima.

Sviluppi di LAPLACE e applicazioni

(calcolo dei matrici inverse, risoluzioni dei sist. quadr. CRAMER)

sviluppo secondo la i-esima riga: $i \to \left(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}\right)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} = matrice che si ottiene da A cancellando riga e colonna di a_{ij}

e sviluppo secondo la j-esima colonna: $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

come si dimostrano?

① per trasposizione, basta mostrare lo sviluppo sulle colonne

② per alternanza, basta mostrarlo per la prima colonna

③ ci sono 2 possibilità:

- mostrare che la formula di Laplace dà una funzione $M_n(K) \to K$ che è
  - multilin. colonne
  - alt. colonne ← segue!
  - vale 1 su $\mathbb{1}_n$ (facile!)
- mostrare che dà esattamente la formula della permutazioni per $\det(A)$.

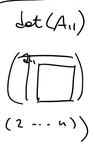
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

$\sigma(1) = 1$, $\sigma(1) = 2$, $\vdots$, $\sigma(1) = n$

$a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ $\quad a_{ij}$

$$= \sum_{\sigma : \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{11} \prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma : \sigma(1)=2} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{21} \prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i} + \cdots + \sum_{\sigma : \sigma(1)=n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{n1} \prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

$$= a_{11} \underbrace{\left(\sum_{\sigma : \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i}\right)}_{\det(A_{11})} + a_{21}\left(\sum_{\sigma : \sigma(1)=2} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i}\right)$$



$\begin{pmatrix} 1 & (2 \cdots n) \\ 1 & \end{pmatrix}$

$\sigma : (1\ 2\ 3 \cdots n)$

$\{1\ 2\ 3 \cdots n\}$

σ_2 $\{\hat{2}\ 3 \cdots n\}$

$\{1\ \hat{2}\ 3 \cdots n\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2\ 3 \cdots n \\ 2 & 1\ 3 \cdots n \end{pmatrix}$

$a_{21}\left(\sum_{\sigma_1} -\operatorname{sgn}(\sigma_2) \prod a_{\sigma(i),i}\right)$

$-a_{21} \det(A_{21})$

$(-1)^{2+1}$

$\sigma(1) = i$

$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$

$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i & 1\ 2 & \hat{i} & \cdots n \end{pmatrix}$

σ_i

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1} \operatorname{sgn}(\sigma_i)$

$= (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma_i)$

Sviluppi ALTRI di LAPLACE:

Laplace: $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \det(A)$

$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{\ell j}) = \begin{cases} \det(A) & i = \ell \\ 0 & i \neq \ell \end{cases}$

sviluppi alieni.

$i \to$, $\ell \to$

$i \to \ell \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$

$$\underset{(a_{ij})}{A} \quad \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)^t = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)\, \mathbb{1}_n$$

$\sum a_{ij} b_{\ell j}$

$\sum a_{ij} b_{j\ell}$

matrice dei cofatt. algebrici (segnati trasposti) di A

= matrice AGGIUNTA di A

$$\boxed{A^c := \left((-1)^{i+j} \det(A_{ji})\right)_{i,j}}$$

$$\boxed{A A^c = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n}$$

$$\boxed{\text{dunque se } \det(A) \neq 0 \text{ e } A \in GL_n(K) \text{ allora } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^c}$$

Esempi:

$(n=2)$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$(-1)^{1+2}$, $(-1)^{2+1}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(n=3)$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{(\det)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Problema:

① $A \rightsquigarrow A^c$

$\boxed{A A^c = \det(A)\, \mathbb{1}_n}$

$M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$

$rg(A^c)$? $\nearrow$

$rg(A) = n \Rightarrow rg(A^c) = n$ facile!

$rg(A) = n-1 \Rightarrow rg(A^c) = 1$

$rg(A) < n-1 \Rightarrow rg(A^c) = 0$

$A^c = 0$

② $A \rightsquigarrow A^c \longrightarrow (A^c)^c$ cosa c'entra con la matrice A?

Formula di CRAMER per sistemi quadrati invertibili.

se abbiamo il sistema lineare

$AX = b$ con $A \in M_n(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

e $A \in GL_n(K)$

allora l'unica soluzione si scrive

$AX = b$ molti a sx per A^{-1}

$A^{-1}(AX) = A^{-1} b$

$\boxed{X = A^{-1} b}$

Esplicitiamo la soluzione $X = A^{-1} b$ usando Laplace:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^c = \frac{1}{\det(A)} \left((-1)^{i+j} \det(A_{ji})\right)_{i,j}$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \left(\text{riga } i\text{-esima di } A^c\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \left((-1)^{i+1} \det(A_{1i}), (-1)^{i+2} \det(A_{2i}) \cdots, (-1)^{i+n} \det(A_{ni})\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ji})\, b_j$$

$$\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} & A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \det(A_i)$$

A_i = matrice che si ottiene da A sostituendo la i-esima COLONNA con la colonna dei termini noti

$$= \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$$x_i = \frac{\det(\text{matrice in cui al posto dei coeff. ci sono i } b_i)}{\det(\text{matrice})} \quad //$$

$\det(A) = |A|$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & b \\ y_0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & x_0 \\ c & y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

12/12/2022

Domani: rapporto tra determinanti e rango per matrici qualsiasi!

Nota: $A \in M_n(K)$: $rg(A) = n$ sse $\det(A) \neq 0$

domanda: se $rg(A) < n$?

Problema per $A \in M_{n,m}(K)$

Definizione se $A \in M_{n,m}(K)$ diciamo

MINORI di A i determinanti di

SOTTOMATRICI quadrate di A

(matrice che si ottiene da A cancellando alcune righe e alcune colonne), (ordine del minore = ordine della sottomatrice)

Esempio: cofatt. algebrici di $A \in M_n(K)$ sono minori (segnati) di ordine $n-1$

minori d'ordine 1 di A = a_{ij}

minori d'ordine 2 di A $\in M_{n,m}$ quanti sono? $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$

Teorema: $A \in M_{n,m}(K)$

$rg(A) \ge s$ sse esiste un minore di A, $\neq 0$, di ordine s

$rg(A) \ge s \Rightarrow \exists$ s colonne di A indipendenti

$\Rightarrow$ in queste colonne $\exists$ s righe indip.

$\Rightarrow$ selezionando queste righe e queste colonne troviamo una sottomatrice $s \times s$, di rango s, $\Rightarrow \det \neq 0$

$\Rightarrow$ un minore d'ord $s \neq 0$.

un minore d'ord $s \neq 0 \Rightarrow$ le s colonne di quel minore sono lin. indip.

$\Rightarrow rg(A) \ge s$ //

dunque $\boxed{rg(A) = r \text{ sse } \exists \text{ minore} \neq 0 \text{ di ordine } r,\ \forall \text{ minore di ordine} > r \text{ è } 0.}$

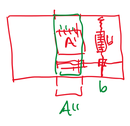
sse $\exists$ minore $\neq 0$ di ordine r, $\forall$ minore di ordine $r+1$ è 0.

ogni minore di ordine $> r+1$ per sviluppi di Laplace è combinazione di minori di ordine $r+1$, dunque sono di 0.

Principio dei minori ORLATI:

$rg\, A = r$ sse $\exists$ minore d'ordine r, $\neq 0$, (sia sottomatrice A') $\forall$ minore ORLATO di A' (= che si ottiene da A' aggiungendo 1 riga e 1 colonna) è 0.

Suggerimento: usando l'ipotesi vogliamo che tutte le colonne della matrice A sono combin. lineari delle colonne delle sottomatrici A'.



$A'X = b'$

$A''X = b$ se ho soluzione, è l'unica

ed è sistema COMPATIBILE, usando l'ipotesi sui minori. //

Applicazione:

calcoliamo le equazioni cartesiane del sottospazio

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\dim 2} \right\rangle \le K^4$$

devono essere $4 - 2 = 2$ equaz. cartesiane

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sse $rg \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ $\neq 0$

sse minori d'ordine 3 sono 0 (4 minori!)

sse $\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} * x_1 \quad x_3 \quad x_4 = 0 \\ * x_2 \quad x_3 \quad x_4 = 0 \end{cases}$

lin. indip. perché forma scala sacra

13/12/2022