Determinanti di endomorfismi e di matrici quadrate

Motivazioni:

① se $AX = b$ è sistema lineare quadrato ($n \times n$) $A \in M_n(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

allora la soluzione si calcola:

$x_1 = \frac{\text{numeratore } \det(A_1 b)}{\text{denominatore } \det(A)}$

$x_2 = \frac{\text{"}}{\text{"}}$

$x_n = \frac{\text{"}}{\text{"}}$

denominatore sempre lo stesso $= \det(A)$

Esempio:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} ax + by = x_0 \\ cx + dy = y_0 \end{cases}$

$\boxed{ad - cb \neq 0}$

$X(ad - bc) = dx_0 - by_0 \Rightarrow x = \frac{dx_0 - by_0}{ad - bc}$

$\Rightarrow y = \frac{\dots}{ad - bc}$

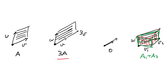
② def. lineare:

cosa significa se $v_1, \dots, v_n$ sono "linearmente indipendenti"?

Sono anche per coordinate, equazioni CARTESIANE di SOTTOSPAZI

dimostrazioni dei vettori di base, generale, possono per tre eq. geometriche.

③



Definizione: Sia V sp. vett su K, $\dim_K V = n < \infty$

una funzione

$\delta : V \times V \times \dots \times V \longrightarrow K$

$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \delta(v_1, \dots, v_n) \in K$

si dice FORMA MULTILINEARE ALTERNANTE se:

(multilineare)

(1) è MULTILINEARE:

$\delta(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(v_i, v_2, \dots, v_n)$

$\delta(v_1, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_3, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(v_1, v_i, v_3, \dots, v_n)$

$\vdots$

$\delta(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i)$

CIOÈ "è lineare in ogni argomento" FISSATI gli altri argomenti di δ ?

(2) è ALTERNANTE:

se $\exists i, j$ con $i \neq j$ $v_i = v_j \Rightarrow \delta(v_1, \dots, \underbrace{v_i}_{=} \dots, v_n) = 0$

CIOÈ "se succede che due argomenti sono uguali".

$\text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K) = \{ \delta : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \to K \text{ lineare alternante} \}$

è uno spazio vettoriale su K: $\delta_1 + \delta_2$, $\lambda \delta_1$

$(\delta_1 + \delta_2)(v_1, \dots, v_n) = \delta_1(v_1, \dots, v_n) + \delta_2(v_1, \dots, v_n)$

$(\lambda \delta_1)(v_1, \dots, v_n) = \lambda \cdot \delta_1(v_1, \dots, v_n)$

con quelle regole scalari.

Teorema: $\dim_K(V) = n < \infty$

allora $\dim_K(\text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K)) = 1$

e precisamente: se $e_1, \dots, e_n \in$ base di V

allora la funzione

$\text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K) \longrightarrow K$

$\delta \longmapsto \delta(e_1, \dots, e_n)$

è ISOMORFISMO.

Osservazione:

ALTERNANTE $\Rightarrow$ ANTISIMMETRICA

$\delta(v, v) = 0 \Leftarrow \delta(v, w) = -\delta(w, v)$

$(\Rightarrow)$ $\underbrace{\delta(v+w, v+w)}_{0} = \delta(v+w, w) + \delta(v+w, v)$

$= \underbrace{\delta(v, w)}_{0} + \delta(w, w) + \delta(v, v) + \underbrace{\delta(w, v)}_{0}$

$0 = \delta(v, w) + \delta(w, v)$

$\delta(v, w) = -\delta(w, v)$,

$(\Leftarrow)$ $\underbrace{\delta(v, v)}_{x} = -\delta(v, v)$

$\Rightarrow 2x = 0$

in mod K $\neq 2$ $(2 \neq 0)$

$\Rightarrow \delta(v, v) = 0$

---

dimostrazione del teorema:

vogliamo vedere che data base $e_1, \dots, e_n$ di V la funzione

$\text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K) \xrightarrow{\text{ev}_{\underline{e}}} K$

$\delta \longmapsto \delta(e_1, \dots, e_n) := \text{ev}_{\underline{e}}(\delta)$

è lineare

$\text{ev}_{\underline{e}}(\lambda \delta_1 + \delta_2) = \lambda \, \text{ev}_{\underline{e}}(\delta_1) + \text{ev}_{\underline{e}}(\delta_2)$

ed è iniettiva, cioè biunivoca.

ovvero:

ab. valore $\delta(e_1, \dots, e_n) \in K$ determina completamente la funzione δ

$(\delta(e_1, \dots, e_n) = \delta_1(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2$ in realtà ...)

Cerchiamo per $v_1, \dots, v_n \in V$ qualsiasi,

quanto vale $\delta(v_1, v_2, \dots, v_n)$:

Cioè come $v_1, \dots, v_n$ è base di V, allora

$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) A$, $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

$(a_{ij}(v_j) = a_{ij}(v_1) \dots a_{ij}(v_n))$

$v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i$

$v_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i$

$\vdots$

$v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i$

$\delta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \delta(\sum_{i_1} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2} a_{i_2 1} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} a_{i_n 1} e_{i_n})$

"Sempre FORMALMENTE"

$= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \, \delta(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$

n^n addendi

$= 0$ se almeno indici uguali

$\neq 0$ SE $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (1, \dots, n)$

$= \sum_{\sigma \in \text{Permutazioni di } \{1, \dots, n\}} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \, \delta(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$

$n!$ addendi

$\neq 0$ SE $(i_1, i_2, \dots, i_n)$

$= \left(\underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} (\prod a_{\sigma(i), i}) \cdot \text{sgn}(\sigma)}_{\det(A)} \right) \delta(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Conclusioni:

① se conosco $\delta(e_1, \dots, e_n)$ vale per $e_1, \dots, e_n$, allora calcolo δ su qualsiasi n sistema $v_1, \dots, v_n$

$\delta(v_1, \dots, v_n) = \delta(e_1) \cdot \delta(e_1, \dots, e_n)$

dunque se $\delta(e_1, \dots, e_n) = \delta_1(e_1, \dots, e_n)$

allora $\delta_1 = \delta_2$ cioè funzioni!

cioè $\delta \mapsto \delta(e_1, \dots, e_n)$ INIETTIVA.

$\text{ev}_{\underline{e}}(\delta) = \delta(e_1, \dots, e_n)$

② la mappa è anche suriettiva, perché basta vedere che ESISTE almeno 1 funzione $\delta \neq 0$ e la funzione del primo è proprio la costruzione.

definisco $\delta(e_1, \dots, e_n) = 1$

$\delta(v_1, \dots, v_n) = \det(A) \cdot 1$

è per funzione in Hom_{Alt} per costruzione, e $\delta(e_1, \dots, e_n) = 0$

Naturalmente la mappa $\delta \mapsto \delta(e_1, \dots, e_n)$ dipende dalla base $e_1, \dots, e_n$.

Osservazione:

se $\delta \in \text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K)$, $\neq 0$

$\boxed{v_1, \dots, v_n \text{ vettori lin. dipend.} \Rightarrow \delta(v_1, \dots, v_n) = 0}$

Posso scrivere $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i$

allora

$\delta(v_1, \dots, v_n) = \delta(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i)$

$= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \, \delta(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_i)$

$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0$

e viceversa?

$\boxed{A \Rightarrow B}$ = $\neg B \Rightarrow \neg A$

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$ = $\boxed{\neg A \Leftrightarrow \neg B}$

$\boxed{\begin{array}{l} \delta \in \text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K) \\ v_1, \dots, v_n \text{ sono base di } V \Rightarrow \delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \end{array}}$ ✗

Non vale dal conto fondamentale dimostrato che se $\delta(v_1, \dots, v_n) = 0$ allora δ annulla su ogni $v_1, \dots, v_n$

dunque $\delta = 0$ ✗.

Quindi ogni $\delta \in \text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K)$, $\neq 0$

è un test di indipendenza lineare:

$\delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ SE $v_1, \dots, v_n$ base

$\delta(v_1, \dots, v_n) = 0$ SE $v_1, \dots, v_n$ dip.

Definizione: $\varphi : V \longrightarrow V$ endomorfismo $(\dim_K V = n < \infty)$

e prendiamo $\delta \in \text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K)$, $\neq 0$

$v_1, \dots, v_n$ base di V

allora

$\det(\varphi) := \frac{\delta(\varphi v_1, \dots, \varphi v_n)}{\delta(v_1, \dots, v_n)}$

e questa definizione dipende da φ, ma non dipende né da δ né dalla base $v_1, \dots, v_n$ scelta:

infatti se $\delta_1, \delta_2 \in \text{Hom}_{\text{Alt}}(V, K)$, $\neq 0$ allora $\delta_2 = \lambda \delta_1$ con $\lambda \in K$, $\neq 0$

dunque $\frac{\delta_2(\varphi v_1)}{\delta_2(v_1)} = \frac{\lambda \delta_1(\varphi v_1)}{\lambda \delta_1(v_1)} = \frac{\delta_1(\varphi v_1)}{\delta_1(v_1)}$

se $v_1, \dots, v_n$ base, $w_1, \dots, w_n$ base di V

allora

$\frac{\delta(\varphi w_1)}{\delta(w_1)} = \frac{\delta(\varphi v_1)}{\delta(v_1)}$

$\delta(w_1) = (\det M) \delta(v_1)$

$(\varphi w_1) = \varphi(M v_1) = M(\varphi v_1)$

$= (\det M) \cdot M$

(ordinamento:

"calcolo δ su base $v_1, \dots, v_n$ e cambio variabile una volta diversa in w_1 etc.

Se $w_1, \dots, w_n$, cioè $\delta(w_1, \dots) = \lambda \delta(v_1, \dots)$.)

Definizione: $A \in M_n(K)$:

$\det(A) := \det(\varphi_A)$ dove $\varphi_A : K^n \longrightarrow K^n$, $X \mapsto AX$

dunque $\det : M_n(K) \longrightarrow K$

è l'unica funzione con le seguenti proprietà:

① multilineare sulle colonne di A

② alternante sulle colonne di A

③ $\det(I_n) = 1$ $\left(\det(A) = \det(AI) = \frac{\delta(e_1)}{\delta(e_1)} = 1 \right)$

ci rifletti dal conto fondamentale:

$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}}$

Proprietà: $\det(id) = 1$

$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$

$\det(\varphi \circ \psi) = \frac{\delta(\varphi \circ \psi(e_1) \dots \varphi \circ \psi(e_n))}{\delta(e_1, \dots, e_n)}$

$= \frac{\delta(\varphi \circ \psi(e_1) \dots \varphi \circ \psi(e_n))}{\delta(\psi e_1, \dots \psi e_n)} \cdot \frac{\delta(\psi e_1, \dots \psi e_n)}{\delta(e_1, \dots, e_n)}$

$\frac{\delta(\varphi \circ \psi(e_1) \dots \varphi \circ \psi(e_n))}{\delta(\psi e_1, \dots \psi e_n)} = \det(\varphi)$ formula

se $\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)$ base, $\forall e_1, \dots, e_n$ base

$\frac{\delta(\psi e_1, \dots \psi e_n)}{\delta(e_1, \dots, e_n)} = \det(\psi)$ formula di BINET

$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$

08/12/2022

Osservazioni finali:

(1) $\det(id) = 1$ $\quad$ $\det(I_n) = 1$

$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi)$ $\quad$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ $\quad$ $\det(BA)$

$\det(\varphi^{-1}) = \varphi^{-1} \det(\varphi)$ $\quad$ $\det(A^{-1}) = \varphi^{-1} \det(A)$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

$\det(\varphi) \neq 0$ se φ ISO $\quad$ $\boxed{\det(A) \neq 0 \text{ SE } A \in GL_n(K)}$

$\det : GL_n(K) \longrightarrow K^* = K \setminus \{0\}$

è mappa di GRUPPI MOLTIPLICATIVI

$\ker(\det) = \{ A \in GL_n(K) : \det(A) = 1 \}$

è SOTTOGRUPPO NORMALE di $GL_n(K)$, e si chiama

$SL_n(K) \trianglelefteq GL_n(K)$

speciale lineare

Vediamo quali det applicano calcolare usando:

(1) $\det \in$ multilin. di colonne

(2) $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i})$

$A =$

(4) Faccio una prova:

$\det(A) = \det(A^T)$, $A = (a_{ij})$, $A^T = (a_{ji})$

$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod a_{i,\sigma(i)}$

$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod a_{\sigma(i),i}$

$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i),i}$

$\Rightarrow \det(\sigma) = \det(\sigma^{-1})$

Esempi basilari:

(1) $\det(a) = a$

(2) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}}_{\sigma(1)} - a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{32} \end{pmatrix}}_{\sigma(2)}$

$|S_1| = 2! = 2$

"dipendente = non indipendente"

(3) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\sigma(1)} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\sigma(2)} + a_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{\sigma(3)}$

$- a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\sigma(4)} - a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\sigma(5)} - a_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{\sigma(6)}$

$|S_3| = 3! = 6$

" 3 dipendenti = 3 dipendenti ed"

" formula di SARRUS"

(4) $|S_4| = 4! = 24$

(2) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn} = \prod \text{diagonale}$

Uniche permutazione non dà contributo $= 0$ è id.

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod a_{\sigma(i),i}$

$= a_{11} \cdots a_{nn}$

ogni permutazione dà zero tranne UNICAMENTE a_{ii} con $a_{ii} \neq 0$

perché:

$\sigma(1)$ ci obbligherà $\sigma_{11} \neq 0$

$\sigma(2) \neq 1$ poi vuole $\sigma_{22} \neq 0$

$\sigma(3) \neq 1, 2$ poi vuole $\sigma_{33} \neq 0$

$= 3$ addendi tra 0

etc... viene solo l'identità!

Per ogni vanno da metti indietro dati di 0 lasciamo nulla $\sigma(1) = 1$ per vuoi, e allora $\sigma = id$.

(3) Quindi sarà i det delle matrici triangolari di Jordan?

$A \longrightarrow A_1 = AE_1$

$\det(A_1) = \det(AE_1) = \det(A)\det(E_1)$

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(E) = -1$

$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(E) = 1$ ←

$E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(E) = \lambda$

Quindi sarà i det delle matrici elementari di Jordan?

$\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda$

Non vedrai quella formula, si basa 2 ragionamenti

- Metodi Gauss:

$\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & * \\ \hline 0 & \tilde{B} \end{array} \right)$

$\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & ? \\ \hline 0 & \tilde{B} \end{array} \right) =$ Teorema 1: elementari $\det(\tilde{A}) \cdot \det(\tilde{B})$

$\det \boxed{A} = \det \boxed{\tilde{A}}$ $\quad$ $\det \boxed{B} = \det \boxed{\tilde{B}}$ $\quad$ $= \det(A) \cdot \det(B)$

- Formula Sarrus

$\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i),i}$

$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma, \sigma_1) \prod a_{\sigma(i),i} \prod_{i=n+1} a_{\sigma(i),i}$

se σ manda $\{1, \dots, n\}$ in $\{1, \dots, n\}$ allora σ_1 sarà un elemento nullo, cioè sarà una 0.

$\Rightarrow$ Ci rimane permutazioni che danno addendi non nulli $\{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$

e $\{n+1, \dots, n+k\} \mapsto \{n+1, \dots, n+k\}$

$= \left(\sum_{\sigma_1} \text{sgn}(\sigma_1) \prod a_{\sigma(i),i} \right) \left(\sum_{\sigma_2} \text{sgn}(\sigma_2) \prod a_{\sigma(i),i} \right)$

$= \det(A) \cdot \det(B)$

07/12/2022