RIASSUNTO SULLA DUALITÀ DI SPAZI VETT. (dim < ∞)

V sp. vett. su K ($\dim_K V = n < \infty$)

definiamo duale di V:

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \quad \text{è sp. vett. su } K$$

dim(V^*) = $\dim_K(V)$

$U = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

allora

$U^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ base di V^* duale

$$\forall j \ v_j^* : V \to K \qquad v_j^*(v_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ogni vettore $v \in V$ scrive $v = (x_1 \dots x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\text{canon di } U \text{ in } V} = \sum x_i v_i$

e ogni FUNZIONE $v^* \in V^*$ ha rappresentazione $\alpha_{U(U)}(v^*)$ = vettore con n entrate e n colonne, COME LETTERE COLONNA SONO le coordinate di v^* nella base $v_1^*, \dots, v_n^*$.

$$\boxed{\begin{matrix} (V^* \setminus \{0\})/K^* & \cong & \text{Iperpiani di } V \\ v^* & \longleftrightarrow & \ker(v^*) \leq V \end{matrix}}$$

$$K^* = \{x \in K : x \neq 0\}$$
$$\{x \in K : x \text{ è invertibile}\}$$

$(v^*) = (t^*)$ se $v^* = \lambda t^*$ per $\lambda \in K^*$

$\varphi : V \longrightarrow W$ lineare

$$\begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\ker(\varphi^*) = \varphi^{\perp}(\ker \varphi)}$$

$w^* \in \mathrm{Im}\,\varphi^* \Rightarrow \varphi^*(w^*) = v^* \in$ lineare

$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$

$\varphi \longmapsto \varphi^*$

è funzione lineare, biunivoca.

Inoltre: se $A = \alpha_{U,W}(\varphi)$ matrice di φ nella base U di V e W di W

allora $\alpha_{W^*,U^*}(\varphi^*) = A^t$ matrice TRASPOSTA di A.

Dim:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(V,W) \arrow[r, "\varphi \longmapsto \varphi^*"] \arrow[d, "\alpha_{U,W}"'] & \mathrm{Hom}(W^*, V^*) \arrow[d, "\alpha_{W^*,U^*}"] \\ M_{\dim V, \dim W}(K) \arrow[r, "A \longmapsto A^t"] & M_{\dim W, \dim V}(K) \end{tikzcd}$$

Nota: per $\varphi : V \to W$ lineare

se $H \leq$ iperpiano nel V

allora $\varphi(H) \leq W$

non è iperpiano di W.

però se $L \leq$ iperpiano di W

allora $\varphi^{-1}(L) = \{v \in V : \varphi(v) \in L\} \leq V$

è iperpiano di V

perché se $L = \{w \in W : f(w) = 0$ per qualche $f \in W^*\}$

allora

$$\varphi^{-1}(L) = \{v \in V : \varphi(v) \in L\}$$
$$= \{v \in V : f(\varphi(v)) = 0 \text{ per qualche } f \in W^*\}$$
$$(f \circ \varphi)(v) = 0$$
$$= \{v \in V : \varphi^*(f)(v) = 0 \text{ per } f \in V^*\}$$
$$= \ker(\varphi^*(f))$$

dunque $\varphi^*(f)$ è iperpiano corrispondente al cammino $\varphi^*(f)$ a f che concorda su L.

$$(id_V)^* = id_{V^*}$$
$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi \circ \psi"] & V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l, "\psi^*"'] & W^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Domanda:

$V \longrightarrow V^* \longrightarrow (V^*)^* \quad \cdots \quad ?$
$\mathrm{Hom}_K(V, K) \quad \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$ } Teorema di dualità di biduale

$\varphi \longrightarrow \varphi^*$ $\ker(\varphi^*)$? $\mathrm{Im}(\varphi^*)$? } Teoria di ortogonalità.

Premessa: $V \leq V^*$ hanno la stessa dim, quindi sono isomorfi come equivalenti, per es.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & V^* \\ v_1 \arrow[r, mapsto] & v_1^* \\ \vdots & \vdots \\ v_n \arrow[r, mapsto] & v_n^* \end{tikzcd}$$

base base

è isomorfismo ma DIPENDE DALLA SCELTA della base.

Teorema di dualità:

la funzione $V \times V^* \longrightarrow K$ (CROCHET $\langle v, v^* \rangle = v^*(v)$)

definita da $(v, v^*) \longmapsto v^* \circ v^* = v^*(v)$

ha le seguenti proprietà:

(1) è BILINEARE (non lineare).

- $(\lambda v_1 + v_2) \circ v^* = \lambda(v_1 \circ v^*) + v_2 \circ v^*$
- $v \circ (\lambda v_1^* + v_2^*) = \lambda(v \circ v_1^*) + v \circ v_2^*$

" lineare su ciascun argomento

Siccome è una espressione $v^*(v)$:

$(\lambda v_1^* + v_2^*) \circ v^* = \lambda v_1^* \circ v^* + v_2^* \circ v^*$

$= \lambda \langle v, v_1^* \rangle + \langle v, v_2^* \rangle$

(2) è NON DEGENERE:

- $v^* \circ v^* = 0 \quad \forall v^* \in V \Rightarrow v^* = 0$
- $v \circ v^* = 0 \quad \forall v^* \in V^* \Rightarrow v = 0$

facile $v^* : V \to K$

$v^*(v) = 0 \ \forall v \Rightarrow v^* = 0$

Hanno senso: $v \in V$ e $v^* : V \to K \Rightarrow v^*(v) = ?$

Si, perché se $v_1, \dots v_n$ base V

$v = \sum x_i v_i$; $v^*(v) = 0 \ \forall v^*$

Usiamo v^* duali: $v_1^*, \dots, v_n^*$

$0 = v_i^*(v) = v_i^*(\sum_j x_j v_j) = x_i \quad \forall i$

$= \sum_j x_j v_i^*(v_j)$ $\quad \delta_{ij}$

quindi $v = 0$.

Teorema di RIDUALITÀ:

esiste un ISOMORFISMO CANONICO:

$\sigma : V \longrightarrow (V^*)^* = V^{**}$

valutazione + evaluation

t.c. $\sigma_V(v) : V^* \longrightarrow K$ $\quad \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$

$\sigma_V(v)(v^*) = v^*(v) = v \circ v^*$

Inoltre se $\varphi : V \longrightarrow W$

allora

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_V"'] & W \arrow[d, "\sigma_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

è commutativo, cioè se identifichiamo V con V^{**} e W con W^{**} allora φ è identificata con φ^{**}.

Nota: $\mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^*, W^*) \cong \mathrm{Hom}_K(V^*, W^*)$

$\varphi \longmapsto \varphi^*$ $\quad \varphi \longmapsto \varphi^*$

$V \to W \qquad V^* \to W^*$

$U \to V \qquad U^* \to V^*$

$V \to U \qquad W^* \to U^*$

Isomorfismo canonicamente uguale!

dimostrazione: (1) facile

(2) facile per fatto.

(3) $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$

facile se $U = \langle v_1, \dots v_k \rangle$ base di U ($s = \dim U$)

allora $U^\perp = \{v^* : \begin{matrix} v^*(v_1) = 0 \\ \vdots \\ v^*(v_s) = 0 \end{matrix}\}$

scrivendo un una base di V abbiamo delle equazioni lineari: $\begin{cases} (v_1, \dots, v_n)(t_1) = 0 \\ \vdots \\ (t_s) = 0 \\ \vdots \\ (t_s) = 0 \end{cases}$ SISTEMA con s equazioni indipendenti

Perciò spazio $\dim(U^\perp) = n - s$.

(4) $U = U^{\perp\perp}$ perché:

$\dim U^{\perp\perp} = n - \dim U^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U$

quindi basta inclusione $U \subseteq U^{\perp\perp}$

ed è facile:

se $t \in U$

allora $\forall f \in U^\perp$ si ha $f(t) = 0$

quindi $f(t) = 0 \ \forall f \in U^\perp$

cioè $t \in (U^\perp)^\perp$.

(5) $(U_1 + U_2)^\perp = \{v^* \in V^* : v^*(U_1 + U_2) = 0\}$

$= \{v^* \in V^* : v^*(U_1) = 0, v^*(U_2) = 0\}$ $\quad v^*(U_1) = 0 \Leftrightarrow v^*(u_1) = 0 \ \forall u_1 \in U_1$

$= U_1^\perp \cap U_2^\perp$

$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

$\dim_K(U^\perp) = \dim_K(V) - \dim_K(U)$

" $\perp$ è ANTI ISOMORFISMO INVOLUTIVO DI RETICOLI "

$U^{\perp\perp} = U$

Osservazioni/esercizi:

$S \subseteq V$ sottoinsieme qualsiasi

allora $S^\perp \leq V^*$ sotto-spazio

$(S^\perp)^\perp$ è sottospazio di V che $\supseteq S$

perché: $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$ (anche $\supseteq$)

e $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$.

Interpretazione "geometrica":

se $U \leq V$ $\quad U \cap \ker(f)$

allora i covettori di $U^\perp = \{f : f(U) = 0\}$

corrispondono ai POSTULATI di V che CONTENGONO U

dunque U = intersezione degli iperpiani corrispondenti ai covettori di $U^\perp$.

TEORIA degli OMOMORFISMI:

definizione: $S \subseteq V$ definiamo $S^\perp \leq V^*$

come:

$$S^\perp := \{v^* \in V^* : \begin{matrix} v^*(v) = 0 & \forall v \in S \\ v^*(S) = 0 \end{matrix}\}$$
$$= \langle (S) \rangle^\perp$$

Chiaramente basta controllare tutti gli elementi di S, perché tutto $\langle S \rangle \leq V$

il fatto che $S^\perp$ sia sottospazio di V^* è facile.

Allora inversione $U \mapsto U^\perp$ per $U \leq V$

è una funzione

sottospazi di V $\longrightarrow$ sottospazi di V^*

reticolo $\mathcal{S}(V)$ $\qquad$ $\mathcal{S}(V^*)$ reticolo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] & U^\perp \in V^* \end{tikzcd}$$
$U \leq V$

che ha le seguenti proprietà:

(0) $V^\perp = \{0\} \leq V^*$, $\{0\}^\perp = V^*$

(1) $U_1 \leq U_2 \Rightarrow U_2^\perp \geq U_1^\perp$

infatti: se $u^* \in U_2^\perp \Leftrightarrow u^*(U_2) = 0$

per $U_1 \subseteq U_2$

$\Rightarrow u^*(U_1) = 0$

$\Rightarrow u^* \in U_1^\perp$.

(2) $U^\perp \leq V^*$

$(U^\perp)^\perp \leq V^{**} \cong V$, $\boxed{U^{\perp\perp} = U}$

(nota: ③ $\mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(V^*)$ $\quad \mathcal{S}(V^*) \xrightarrow{\perp} \mathcal{S}(V)$

$U \mapsto U^\perp$ $\quad W \mapsto W^\perp = \{v \in V : f(v) = 0 \ \forall f \in W\}$ " $\cap$ ker $(\ker f)$ con $f \in W$ ")

(3) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

(5) $\dim_K(U^\perp) = \dim_K(V) - \dim_K(U)$

" $\perp$ è ANTI ISOMORFISMO INVOLUTIVO DI RETICOLI "

$U^{\perp\perp} = U$

dimostrazione: (0) facile

(1) facile per fatto.

(2) $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$

facile se $U = \langle v_1, \dots v_s \rangle$ base di U ($s = \dim U$)

allora $U^\perp = \{v^* : \begin{matrix} v^*(v_1) = 0 \\ \vdots \\ v^*(v_s) = 0 \end{matrix}\}$

scrivendo un una base di V abbiamo delle equazioni lineari: $\begin{cases} (v_1, \dots, v_n)(t_1) = 0 \\ \vdots \\ (t_s) = 0 \\ \vdots \\ (t_s) = 0 \end{cases}$ SISTEMA con s equazioni indipendenti

Perciò spazio $\dim(U^\perp) = n - s$.

(3) $U = U^{\perp\perp}$ perché:

$\dim U^{\perp\perp} = n - \dim U^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U$

quindi basta inclusione $U \subseteq U^{\perp\perp}$

ed è facile:

se $t \in U$

allora $\forall f \in U^\perp$ si ha $f(t) = 0$

quindi $f(t) = 0 \ \forall f \in U^\perp$

cioè $t \in (U^\perp)^\perp$.

(5) $(U_1 + U_2)^\perp = \{v^* \in V^* : v^*(U_1 + U_2) = 0\}$

$= \{v^* \in V^* : v^*(U_1) = 0, v^*(U_2) = 0\}$ $\quad v^*(U_1) = 0 \Leftrightarrow v^*(u_1) = 0 \ \forall u_1 \in U_1$

$= \{v^* \in V^* : v^*(U_1) = 0\} \cap \{v^* : v^*(U_2) = 0\}$

$= U_1^\perp \cap U_2^\perp$

Proviamo nuovamente con $U_1 \mapsto U_1^\perp$, $U_2 \mapsto U_2^\perp$

$(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp$

$= U_1 \cap U_2$

Applichiamo $\perp$

$(U_1^\perp + U_2^\perp)^{\perp\perp} = (U_1 \cap U_2)^\perp$

$U_1^\perp + U_2^\perp$

e abbiamo la seconda formula! //

Data $\varphi : V \longrightarrow W$ lineare

consideriamo

$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ funzione duale o trasposta

$\ker(\varphi^*) = \{w^* \in W^* : \varphi^*(w^*) = 0\}$

$= \{w^* \in W^* : w^* \circ \varphi = 0\}$

$= \{w^* \in W^* : w^*(\mathrm{im}(\varphi)) = 0\}$

$= (\mathrm{im}\,\varphi)^\perp \leq W^*$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "w^*"] & K \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "w^* \circ \varphi = 0"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "w^*"] & K \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "w^* \circ \varphi = 0"'] & \end{tikzcd}$$

Ci aspettiamo:

φ^* INIETTIVA sse $\ker \varphi^* = 0$

sse $(\mathrm{im}\,\varphi)^\perp = 0$

sse $\mathrm{im}\,\varphi = W$

sse φ SURIETTIVA

$\mathrm{im}(\varphi^*) = (\ker(\varphi))^\perp \leq V^*$

Si dimostra usando quella del primo, scritti tramite φ con φ^*:

$\ker(\varphi^*) = (\mathrm{im}(\varphi))^\perp \Rightarrow \ker(\varphi^{**}) = (\mathrm{im}(\varphi^*))^\perp$

$\ker(\varphi)$

$\Rightarrow \ker(\varphi)^\perp = \mathrm{im}(\varphi^*)^{\perp\perp}$

$\mathrm{im}(\varphi^*)$

Ci particolare φ^* è SURIETTIVA sse $\mathrm{im}(\varphi^*) = V^*$

sse $\ker(\varphi)^\perp = V^*$

sse $\ker(\varphi) = 0 \in V$

sse φ iniettiva

Problema: $U \leq V$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] & V \arrow[r, "\pi"] & V/U \\ U^* & V^* \arrow[l, "i^*"] & (V/U)^* \arrow[l, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

Immagine di i^*: $\quad (V/U)^* \cong U^\perp \leq V^*$

$U^* \cong V^*/U^\perp$

Suppongo inoltre: i^* sia isomorfismo su i^*, π^*, π^*.

Dunque gli sottospazi di V sono quozienti di V^*

$(U \leq V \quad U^* \cong V^*/U^\perp)$

Dunque gli quozienti di V sono sottospazi di V^*

$(V/U)^* \cong U^\perp \leq V^*$

Mondo: * scambia sottospazi e quozienti.

05/12/2022

Riassunto finale sulla dualità:

① V spazio su K $\longrightarrow$ $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ spazio duale

$v_1, \dots v_n$ base V $\longrightarrow$ $v_1^*, \dots v_n^*$ base V^*

$\dim_K V = \dim_K V$ $\cong$ $\mathrm{rank}\,M_U$ $\qquad M_U = (v_i^*)$

$V_U(v) = M_U(v)$

se $v \in V$ ha coord $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $v^*(v) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

e v^* ha indice $(y_1 \dots y_n)$ $\qquad = \sum x_i y_i \in K$

② $\varphi : V \longrightarrow W$ lineare $\longrightarrow$ $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$

$f \longmapsto \varphi^*(f) = f \circ \varphi$

TRASPOSTA o DUALE

$A = \alpha_{U,W}(\varphi)$ $\qquad \alpha_{W^*,U^*}(\varphi^*) = A^t$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{U,W}"'] & \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \arrow[d, "\alpha_{W^*,U^*}"] \\ M_{\dim V, \dim W}(K) \arrow[r, "A \longmapsto A^t"] & M_{\dim W, \dim V}(K) \end{tikzcd}$$

NO lineare tra spazi di K

coniugata alla TRASPOSIZIONE di matrici

③ dualità e biduale:

$V \times V^* \longrightarrow K$ $\qquad$ e $\qquad$ $V \xrightarrow{\sigma_V} V^{**}$

$(v, v^*) \longmapsto v^*(v)$ $\qquad$ $v \longmapsto \sigma_V(v) : V^* \to K$

$v^* \mapsto v^*(v)$

e è NATURALE

$\sigma_V(v)$

e è isomorfismo

ISO CANONICO di SPAZI VETT.

e $\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_V"'] & W \arrow[d, "\sigma_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$ commuta

$\varphi \longmapsto \varphi^{**}$

④ ortogonalità:

Le funzioni

$\perp : \mathcal{S}(V) \longrightarrow \mathcal{S}(V^*)$ $\qquad$ e $\qquad$ $\perp : \mathcal{S}(V^*) \to \mathcal{S}(V)$

$U \longmapsto U^\perp$ $\qquad$ $W \longmapsto W^\perp$

$\{v^* \in V^* : v^*(U) = 0 \ \forall u \in U\}$ $\qquad$ $\{v \in V : f(v) = 0 \ \forall f \in W\}$

sono antisomorfismi di reticoli uno inverso dell'altro, oppure è antisomorfismo involutivo di reticoli.

⑤ Compagnone alla funzione $\varphi : V \to W$:

$\ker(\varphi^*) = (\mathrm{im}(\varphi))^\perp$: φ^* iniettiva se φ suriettiva

$\mathrm{im}(\varphi^*) = (\ker(\varphi))^\perp$: φ^* suriettiva se φ iniettiva

(φ^* sse φ sse φ bijettiva)

Significato per chi insegna?

⑥ Relazione tra ortogonali e quozienti:

$U \leq V$: $\lambda_U : U \to V$ $\Rightarrow$ $\lambda_U^* : V^* \to U^*$ $\Rightarrow$ $U^* \cong V^*/U^\perp$

$(\mathrm{im}\,\lambda_U) = 0$ $\qquad \ker \lambda_U^* = U^\perp$

$\ker \lambda_U = 0$ $\qquad \mathrm{im}\,\lambda_U^* = U^*$

cioè i duali dei sottospazi di V sono proprietà di V^*

$V \xrightarrow{\pi} V/U$, $\ker \pi = U$ $\Rightarrow$ $\pi^* : (V/U)^* \to V^*$ $\Rightarrow$ $(V/U)^* \cong U^\perp$

$\ker \pi^* = 0$

$\mathrm{im}\,\pi^* = U^\perp$

cioè i duali dei quozienti di V sono sottospazi di V^*

Per dualità scambia sottospazi e quozienti!

⑦ Significato "geometrico":

V vettore $\qquad (V^* \setminus \{0\})/K^*$ $\qquad$ covettori non nulli modulo proporzionalità

v^* $\qquad$ $\ker(v^*) \subseteq V$ $\qquad$ iperpiani di V

$\varphi : V \to W$ $\qquad$ $\varphi^* : W^* \to V^*$

$f \longmapsto f^*(f) = f \circ \varphi$

descrive l'insieme dei φ sugli iperpiani di W.

Se $L \in$ iperpiano di W di equazione f, allora $f^*(f) \in$ insieme di V con iperpiano corrisp. $\varphi^*(L)$.

* Problema: se $W_1 \leq W_2 \leq V$ allora $\begin{pmatrix} W_2 \\ W_1 \end{pmatrix}^* \cong W_2^\perp / W_1^\perp$

$W_1^* \to V^*$, $W_2^* \to V^*$

$W_2^\perp \to W_1^\perp$

Calcolo Lineare & Geometria

FACILE: • dunque vale il problema: $(V/W)^* \cong V^* \cap W^\perp$ (quozientare equivale a fare $\cap$)

Allora dual duali

• dunque di Hom: $(\mathrm{Hom}_K(V, W))^* \cong \mathrm{Hom}_K(V^*, W^*)$

$\cong \mathrm{Hom}_K(W, V)$

! molto difficile!

* Problema di calcolo della base duale:

se $v_1, \dots v_n$ è base di V ($\dim$)

la base duale $v_1^*, \dots, v_n^*$ di $(V/K)^*$

è data dai cofattori t.c.

$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} v_i^*(v_i) = 1 \\ v_i^*(v_j) = 0 \\ i \neq j \end{cases}$

e trovare è equivalente a trovare la matrice inversa di $H = \begin{pmatrix} v_1, v_2, \dots v_n \\ \text{colonne} \end{pmatrix}$

se $H^{-1}H = I_n$

allora $v_i^* =$ i-esima riga di H^{-1}.

Problema: $V = U \oplus W$ $\quad \pi_U^*, \pi_W^*, \pi_U^*, \pi_W^* : V \to V$

domanda: chi sono $(\pi_U^*)^2, (\pi_W^*)^2, \dots$?

dualità del fatto sono proiezioni?

chi sono $\mathrm{im}\,\pi_U^*$, $\mathrm{im}\,\pi_W^*$, $\ker \pi_U^*$, $\ker \pi_W^*$?