Geometria 1 - mod. A - Lezione 25

Note Title

§ Dualità

$V \quad \rightsquigarrow^{\text{forme}} \quad V \xrightarrow{f} K \qquad f \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$

$f \neq 0$: $\ker f =$ iperpiano di V

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \qquad V \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(x) \longmapsto p(\underset{a \in \mathbb{R}}{0})$ è forma

$\mathcal{V} = \{v_1 \dots v_n\}$ base di $V \rightsquigarrow \mathcal{V}^* = \{v_i^*\}$ base di V^*

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

In generale un vettore in V^* viene indicato con v^*

$\underset{f}{v^*}: V \longrightarrow K$

$\varphi: V \longrightarrow W$ K-lineare $\qquad \varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$, $w^* \longmapsto \underbrace{w^* \circ \varphi}_{\text{è } K\text{-lineare } V \to K}$ l'ho definita insiemistic.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "w^* \circ \varphi"'] & W \arrow[d, "w^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Verifico che φ^* è lineare

Siano $w_1^*, w_2^* \in W^*$, $\alpha, \beta \in K$

$$\varphi^*(\underbrace{\alpha w_1^* + \beta w_2^*}_{w^*}) = (\alpha w_1^* + \beta w_2^*) \circ \varphi = (\alpha w_1^* + \beta w_2^*)(\varphi(-))$$

$$= (\alpha w_1^*)(\varphi(-)) + (\beta w_2^*)(\varphi(-)) = \alpha(w_1^* \circ \varphi) + \beta(w_2^* \circ \varphi) =$$

$$= \alpha \varphi^*(w_1^*) + \beta \varphi^*(w_2^*).$$

Ho quindi definito $\mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{(\ )^*} \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$

$\varphi \longmapsto \varphi^* \rightsquigarrow$ trasposta di φ

Mostriamo che è lineare. $\varphi, \psi \in V \to W$

a) $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^* : W^* \to V^*$ b) $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$ $\forall \alpha \in K$

a) Sia $w^* \in W^*$ generico vettore

$$(\varphi+\psi)^*(w^*) = w^*\circ(\varphi+\psi) = \underset{\text{lineare}}{w^*}\big(\underbrace{\varphi(-)+\psi(-)}_{\in W}\big) = w^*(\varphi(-)) + w^*(\psi(-))$$

$$= w^*\circ\varphi + w^*\circ\psi = \varphi^*(w^*) + \psi^*(w^*) \checkmark$$

b) Esercizio.

Noto che se $\varphi: V \to W$ e $\psi: W \to Z$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (\psi\circ\varphi)^* : Z^* \ni z^* \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi^*"'] & & V^* \\ & W^* \arrow[ur, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd}$$

$(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$

(Ricordo il $(\psi\circ\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\circ\psi^{-1}$ ma non sono legati.)

$$(\psi\circ\varphi)^*(z^*) = z^*\circ(\psi\circ\varphi) = (z^*\circ\psi)\circ\varphi = \underset{\in W^*}{\psi^*(z^*)}\circ\varphi = \varphi^*(\psi^*(z^*))$$

$$= (\varphi^*\circ\psi^*)(z^*).$$

<u>Def</u> Sia $A \in M_{m,n}(K)$ $A=(a_{ij})$

La <u>matrice trasposta</u> di A è la matrice $A^t = (a^t_{ij}) \in M_{n,m}(K)$

con $a^t_{ij} := a_{ji}$ $\qquad A^t = {}^tA = A^T$

Ad es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Si verifica:

- $I^t = I$, D diagonale $\Rightarrow D^t = D$

  NB nella trasposizione di matrici quadrate la diagonale rimane fissa.

- La riga i-esima di A^t è la trasposta della colonna i-esima di A.
- $(A^t)^t = A$
- $\underset{C^t}{(AB)^t} = B^t A^t$ $\qquad C = AB$

$c^t_{ij} = c_{ji}$ = riga j-esima di A · colonna i-esima di B

il coeff. di posto i,j di $B^t A^t$ è :

il prodotto della riga i-esima di B^t · la colonna j-esima di A^t

Basta mostrare che $\left[(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right]^t = \cancel{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right)} \in K$

$$= (b_1, \dots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Esercizio Verificare che $(\ )^t$ è applicaz. lineare $(A+B)^t = A^t + B^t$
$(\alpha A)^t = \alpha A^t$

Siano V, W K-spazi vettoriali, siano $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ basi di V e W

dim V = n, dim W = m.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(-)", "\sim\ \text{lineare}"'] \arrow[d, "(\ )^*", "\text{lineare}"'] & M_{m,n}(K) \arrow[d, dashed, "(\ )^t"] \\
\mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(-)", "\sim\ \text{lineare}"'] & M_{n,m}(K)
\end{tikzcd}$$

$\varphi \mapsto \varphi^*$

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi) \mapsto \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi)^t$

|| da dim

$\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(\varphi^*)$

Da dim $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi)^t = \alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(\varphi^*)$

Basta verificare che coincidono sugli elem. di una base.

V W $\varphi_{ji} : V \longrightarrow W$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ $v_\ell \longmapsto \delta_{i\ell} w_j$

ossia se $\ell \neq i$ = 0

se $\ell = i$ $v_i \mapsto w_j$

Rimane da verificare che $\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(\varphi^*_{ji}) = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi_{ji})^t$ ⊛

Esercizio di ripasso $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3$ la proiezione sul

piano $x+y=0$ nella direzione di e_2

Determinare la matrice di π rispetto alla base canonica

partendo dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ ottenuta fissando base

particolare.

(*) (NB) $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi_{ji}) = E_{ji}$ matrice in $M_{m,n}(K)$ avente 0 ovunque tranne un 1 in posizione (j,i)

Dunque $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi_{ji})^t = E_{ji}^t = E_{ij}$ (1 in posizione (i,j) e 0 altrove)

L'entrata di posto (k,l) di $\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(\varphi_{ji}^*)$ è data dalla coordinata k-sima risp. a $\mathcal{V}^*$ dell'immagine di $\varphi_{ji}^*(w_l^*)$ $\uparrow$ l-esimo el. della base $\mathcal{W}^*$

Ora $\varphi_{ji}^*(w_l^*) = w_l^* \circ \varphi_{ji} : V \longrightarrow K$ ed è

a) l'applicazione nulla se $l \neq j$

b) v_i^* se $l = j$

Infatti: $\operatorname{Im} \varphi_{ji} = \langle w_j \rangle$ e $w_l^*(w_j) = \delta_{lj}$

Dunque se $l \neq j$ $\operatorname{Ker} w_l^* \supseteq \operatorname{Im} \varphi_{ji} \Rightarrow w_l^* \circ \varphi_{ji} = 0$ appl. nulla

Se $l = j$ $w_j^* \circ \varphi_{ji} = v_i^*$

Infatti: $(w_j^* \circ \varphi_{ji})(v_k) = w_j^* \circ (\varphi_{ji}\, v_k) = w_j^*(\delta_{ik}\, w_j) = \delta_{ik}\, w_j^*(w_j) = \delta_{ik} = v_i^*(v_k)$

Dunque le 2 appl. coincidono sugli elementi di una base e quindi coincidono.