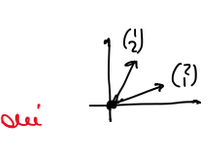
Geo1-22/3-24-SpaziVettEsercizi

martedì 11 ottobre 2022 14:17



Suggerimenti per esercizi:

⊙ dati $u=\binom{1}{2}$, $v=\binom{2}{1}\in\mathbb{R}^2$ disegnare i seguenti insiemi

$\{\alpha u+\beta v \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ ⟶ è tutto il piano perché $\binom{1}{2}$ e $\binom{2}{1}$ sono generatori

$\{\ \text{"} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}_{\geq 0}\}$

$\{\ \text{"} \mid \alpha,\beta\in[0,1]\}$

$\{\ \text{"} \mid \alpha,\beta\in[0,1],\ \alpha+\beta=1\}$

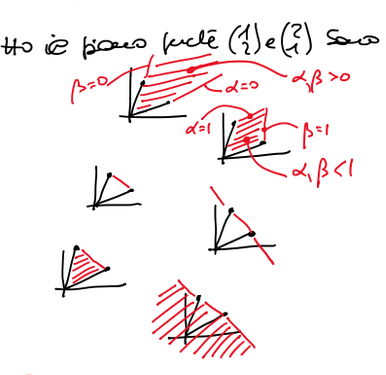
$\{\ \text{"} \mid \alpha+\beta=1\}$

$\{\ \text{"} \mid \alpha,\beta\in[0,1],\ \alpha+\beta\leq 1\}$

$\{\ \text{"} \mid \alpha+\beta\leq 1\}$

quali sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$?

Inventare un analogo esercizio in $\mathbb{R}^3$.



Si vede tutto imponendo le condizioni e

$$\alpha u+\beta v=\alpha\binom{1}{2}+\beta\binom{2}{1}=\binom{\alpha+2\beta}{2\alpha+\beta}=\binom{x}{y}$$

da cui $\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\ y=2\alpha+\beta\end{cases}$, quindi $\begin{cases}\alpha=\frac{2y-x}{3}\\ \beta=\frac{2x-y}{3}\end{cases}$

e impone le condizioni:

$\alpha+\beta \underset{\leq}{=} 1$ è $x+y\underset{\leq}{=}3$

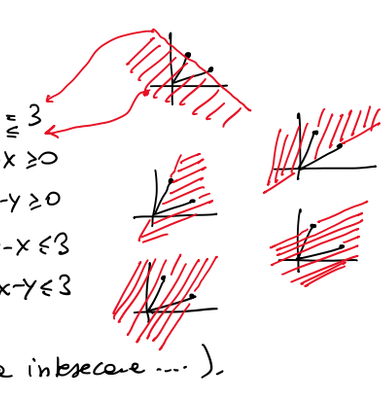
$\alpha\geq 0$ è $2y-x\geq 0$

$\beta\geq 0$ è $2x-y\geq 0$

$\alpha\leq 1$ è $2y-x\leq 3$

$\beta\leq 1$ è $2x-y\leq 3$

(sono semipiani da intersecare ....).



⊙⊙

Sia V spazio vettoriale sul campo K,
sia A un insieme qualsiasi,
sia
$\varphi: V\longrightarrow A$ biiezione insiemistica
con $\psi: A\longrightarrow V$ funzione inversa.

Mostrare che possiamo DEFINIRE su A una struttura di sp. vett. su K nel seguente modo:

$a\oplus a' := \varphi(\psi(a)+\psi(a'))$ $\forall a,a'\in A$

$\lambda\odot a := \varphi(\lambda\psi(a))$ $\forall a\in A, \forall\lambda\in K$.

("TRASPORTO DI STRUTTURA DA V AD A tramite φ")

Quali strutture di sp. vett. su $\mathbb{R}_{>0}$ si ottengono usando $\varphi=\exp: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$, $x\longmapsto e^x$

(usando su $\mathbb{R}$ la struttura usuale)

e

$\varphi=\text{molt}\times x_0: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto x_0 x$

(usando su $V=\mathbb{R}$, dominio, la struttura usuale).

Basta verificare gli assiomi, per esempio:

$$\begin{aligned}a\oplus(b\oplus c)&=\varphi(\psi(a)+\psi(b\oplus c))\\&=\varphi(\psi(a)+\underbrace{\psi(\varphi}_{id}(\psi(b)+\psi(c))))\\&=\varphi(\psi(a)+(\psi(b)+\psi(c)))\\&=\varphi((\psi(a)+\psi(b))+\psi(c))\\&=\varphi(\psi\underbrace{\varphi(\psi(a)+\psi(b))}_{a\oplus b}+\psi(c))\\&=(a\oplus b)\oplus c\end{aligned}$$

$0_A=\varphi(0_V)$

opposto di $a\in A$ è $\varphi(\underset{\text{opposto in }V}{-\psi(a)})$

ecc.

Applichiamo a $\mathbb{R}\xrightarrow{\exp}\mathbb{R}_{>0}$ $(x\mapsto e^x)$
con inversa $\mathbb{R}_{>0}\xrightarrow{\log}\mathbb{R}$ $(y\mapsto\log_e y)$

allora $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$: $a\oplus b=\exp(\log(a)+\log(b))=$
$=\exp(\log a)\cdot\exp(\log b)=$
$=ab$ PRODOTTO in $\mathbb{R}$

elem. neutro: $\exp(0)=1$

$\alpha\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}_{>0}$: $\alpha\odot a=\exp(\alpha\cdot\log a)=$
$=\exp(\log a^\alpha)=$
$=a^\alpha$ è potenza α-esima (possibile perché $a>0$).

Applichiamo a $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $x\longmapsto x_0x$
con inversa $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $a\longmapsto\frac{1}{x_0}a$

allora $a\oplus b=\varphi(\psi a+\psi b)=x_0(\frac{1}{x_0}a+\frac{1}{x_0}b)=a+b$
resta la stessa somma!

$\alpha\odot a=\varphi(\alpha\psi(a))=x_0(\alpha\frac{1}{x_0}a)=\alpha a$
resta lo stesso prodotto per scalari!

(dunque è la stessa struttura!)

Se si usa $x\longmapsto x_0+x$ invece cambia!

⊙⊙⊙ Usando $K=\mathbb{F}_p$ campo con p elementi,
sia $V=V_n(K)=V_n(\mathbb{F}_p)$ $(=\mathbb{F}_p^n)$:

contare il numero di vettori di V,

determinare il numero di sottospazi DISTINTI DI DIMENSIONI $1,2,3,\dots,n-1$ di V.

I vettori $v\in V_n(\mathbb{F}_p)$ sono del tipo

$v=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $x_i\in\mathbb{F}_p$, quindi per ognuno possiamo scegliere p diversi valori di x_i,

$\#(V_n(\mathbb{F}_p))=p^n$

Per contare i sottospazi di dimensione s $(\leq n)$ conviene vedere come possono essere generati con vettori indipendenti:

$$\underset{\substack{\text{scelta } v_1\\ \neq 0}}{(p^n-1)}\ \underset{\substack{\text{scelta } v_2\\ \notin\langle v_1\rangle}}{(p^n-p)}\ \underset{\substack{\text{scelta } v_3\\ \notin\langle v_1,v_2\rangle}}{(p^n-p^2)}\cdots\underset{\substack{\text{scelta } v_s\\ \notin\langle v_1,v_2,\dots,v_{s-1}\rangle}}{(p^n-p^{s-1})}$$

ma ogni sottospazio di dimensione s può essere generato da molte basi diverse, esattamente

$$\underset{\text{scelta } v_1}{(p^s-1)}\ \underset{\text{scelta } v_2}{(p^s-p)}\cdots\underset{\text{scelta } v_s}{(p^s-p^{s-1})}$$

Dunque $$\#\text{sottosp. dim } s=\frac{(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{s-1})}{(p^s-1)(p^s-p)\cdots(p^s-p^{s-1})}=\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-s+1}-1)}{(p^s-1)(p^{s-1}-1)\cdots(p-1)}$$

che è un numero intero!

sottospazi dim 1: $\frac{p^n-1}{p-1}=1+p+p^2+\dots+p^{n-1}$

sottospazi dim 2: $\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)}{(p^2-1)(p-1)}=$

⋮

sottosp. dim n−2

sottospazi dim n−1: $\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^2-1)}{(p^{n-1}-1)\cdots(p-1)}=\frac{p^n-1}{p-1}$

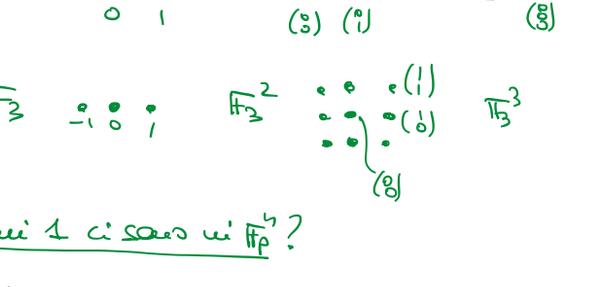
$\mathbb{F}_p=\{\bar0,\bar1,\dots,\overline{p-1}\}=\{\bar0,\pm\bar1,\dots,\pm\overline{(\frac{p-1}{2})}\}$

‖

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

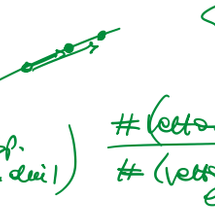
$V=(\mathbb{F}_p)^n=V_n(\mathbb{F}_p)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}: x_i\in\mathbb{F}_p\right\}$ ogni x_i ha p valori possibili

$\#V=\underbrace{p\cdot p\cdots p}_{n\text{ volte}}=p^n$



quanti sottospazi vettoriali di dim 1 ci sono in $\mathbb{F}_p^n$?

$\langle v\rangle=\langle\alpha v\rangle$
$\neq 0$ $\neq 0$



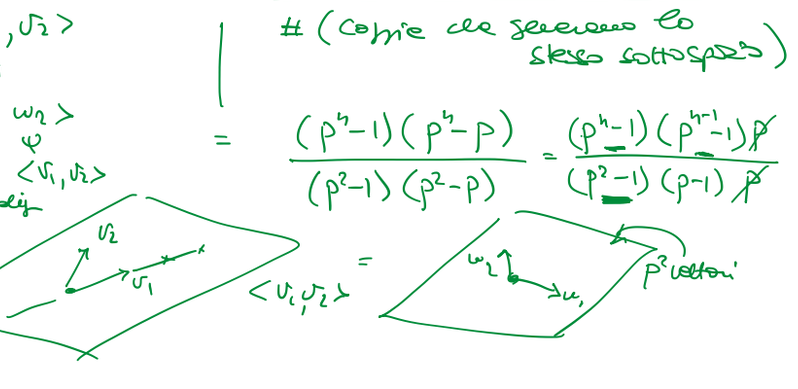
$$\#\begin{pmatrix}\text{sottosp.}\\ \text{vett. dim 1}\end{pmatrix}=\frac{\#(\text{vettori}\neq 0)}{\#(\text{vettori che generano lo stesso spazio})}=\frac{p^n-1}{p-1}=1+p+\dots+p^{n-1}$$

αv con $\alpha\neq 0$ ($p-1$ possibili valori)

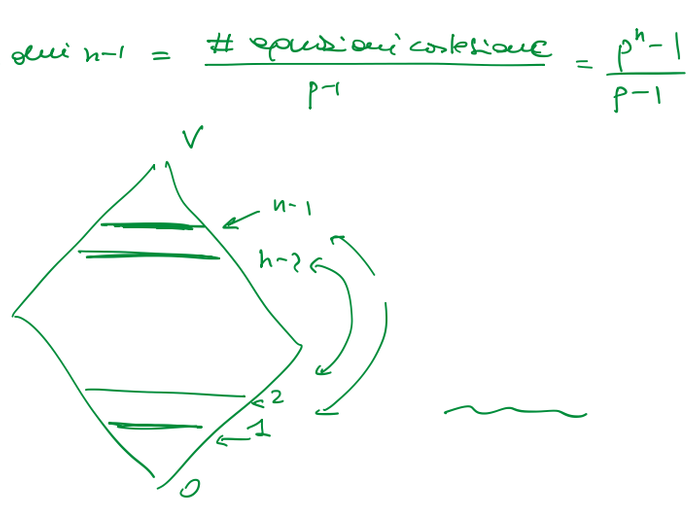
quanti sottosp. vettoriali di dim 2 ci sono in $\mathbb{F}_p^n$?

$$\#\begin{pmatrix}\text{sottosp.}\\ \text{vett. dim 2}\end{pmatrix}=\frac{\#(\text{basi con 2 vettori})}{\#(\text{basi di quel sottospazio})}=\frac{\#(\text{coppie di vettori lin. indip.})}{\#(\text{coppie che generano lo stesso sottospazio})}=\frac{(p^n-1)(p^n-p)}{(p^2-1)(p^2-p)}=\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cancel{p}}{(p^2-1)(p-1)\cancel{p}}$$

$\langle v_1,v_2\rangle$ ‖ $\langle w_1,w_2\rangle$, $w_1\in\langle v_1,v_2\rangle$, $w_2\in\langle v_1,v_2\rangle$ indip.



$$\#\text{sottosp. dim } n-1=\frac{\#\text{equazioni cartesiane}}{p-1}=\frac{p^n-1}{p-1}$$



⊙ basi di $K[X]_{\leq n}$:

esistono basi di $K[X]_{\leq n}$ fatte di

(1) polinomi di grado esattamente n
(2) polinomi di grado < n
(3) polinomi con termine noto nullo.
(4) polinomi a cui "manca solo una potenza di X"

Se sì, sceglierne una e scrivere le COORDINATE in QUELLA BASE del polinomio generico $\sum_{i=0}^n a_iX^i$.

$K[X]_{\leq n}=\{\sum_{i=0}^n a_iX^i \mid a_i\in K\}$
ha dimensione $n+1$,
base canonica $1,X,X^2,\dots,X^n$.

(1) sì, per esempio $\overset{f_0}{1+X^n}, \overset{f_1}{X+X^n}, \overset{f_2}{X^2+X^n},\dots,\overset{f_{n-1}}{X^{n-1}+X^n}, \overset{f_n}{X^n}$
perché si tratta di $n+1$ vettori
e lo spazio generato contiene $1,X,X^2,\dots,X^n$
f_0-f_n, f_1-f_n, f_2-f_n, ... f_n
e quindi è tutto $K[X]_{\leq n}$

(2) no, perché usando comb. lineari di vettori di grado < n non possiamo mai scrivere X^n, quindi non può essere un insieme generatore

(3) no, perché usando combinazioni lineari di polinomi con termine noto nullo non possiamo trovare 1.

(4) sì, per esempio:
$g_0=X+X^2+\dots+X^n$
$g_1=1+X^2+\dots+X^n$
$g_2=1+X+X^3+\dots+X^n$
$g_i=\sum_{\ell\neq i}X^\ell=1+X+X^2+\dots+\widehat{X^i}+\dots+X^n$ (tolto!)
$g_n=1+X+\dots+X^{n-1}$
è una base perché sono $n+1$ vettori
e sono lin. indipendenti:
$a_0g_0+a_1g_1+\dots+a_ng_n=0$
significa
$$\begin{cases}a_1+a_2+\dots+a_n=0\\ a_0+a_2+\dots+a_n=0\\ a_0+a_1+a_3+\dots+a_n=0\\ \vdots\\ a_0+a_1+a_2+\dots+a_{n-1}=0\end{cases}\qquad a_0-a_1=0,\ a_0-a_2=0,\ \dots,\ a_0-a_i=0,\ \dots,\ a_0-a_n=0$$
$\Downarrow$ $na_0=0\Rightarrow a_0=0\Rightarrow a_1=0, a_2=0,\dots,a_n=0$ //

Il polinomio $p(x)=\sum_{i=0}^n a_iX^i$ ha coordinate $\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ nella base canonica $1,X,X^2,\dots,X^n$

mentre ha coordinate $\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ nella base $\overset{f_0}{1+X^n}, \overset{f_1}{X+X^n},\dots,\overset{f_{n-1}}{X^{n-1}+X^n}, \overset{f_n}{X^n}$,

dove $\underset{\sum a_iX^i}{P(x)}=\sum_{i=0}^n b_if_i=\sum_{i=0}^n b_i(X^i+X^n)$
$=b_0+b_1X+\dots+b_{n-1}X^{n-1}+(b_0+b_1+\dots+b_n)X^n$

ovvero $\begin{cases}b_0=a_0\\ b_1=a_1\\ \vdots\\ b_{n-1}=a_{n-1}\\ b_0+\dots+b_n=a_n\end{cases}$ cioè $b_n=a_n-b_0-\dots-b_{n-1}$
$=a_n-a_0-\dots-a_{n-1}$

quindi ha coordinate $\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n-a_{n-1}-\dots-a_1-a_0\end{pmatrix}$

mentre nella base $g_0,g_1,\dots,g_n$ ha coordinate $\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$

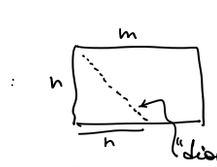
tali che $c_0g_0+c_1g_1+\dots+c_ng_n=P(x)=\sum a_iX^i$
‖
$(c_1+\dots+c_n)+$
$(c_0+c_2+\dots+c_n)X$
$(c_0+c_1+\dots+c_n)X^2$
⋮
$(c_0+c_1+\dots+c_{n-1})X^n$

cioè $\begin{cases}c_1+\dots+c_n=a_0\\ c_0+c_2+\dots+c_n=a_1\\ c_0+c_1+\dots+c_n=a_2\\ \vdots\\ c_0+c_1+\dots+c_{n-1}=a_n\end{cases}$ e si ricavano $c_0,c_1,\dots,c_n$ in funzione di $a_0,\dots,a_n$...

⊙⊙ Nello spazio delle matrici $M_{n,m}(K)=V$ $(A=(a_{ij})\in V)$
siano
$U=\{A\in V: a_{ij}=0 \text{ se } i>j\}$
$L=\{A\in V: a_{ij}=0 \text{ se } i<j\}$
mostrare che sono sottospazi,
trovare basi e dimensioni di $U, L, U\cap L, U+L$.
È vero o falso che ogni matrice si scrive come somma di una matrice in U e una in L, eventualmente trovare tutti i modi possibili.

Lo stesso con $V=M_n(K)$, $S=\{A\in V: a_{ij}=a_{ji}\}$
$A=\{A\in V: a_{ij}+a_{ji}=0\}$

Qui si ha $V=S\oplus A$
se il campo K non ha caratteristica 2
(se invece K ha caratteristica 2 abbiamo $1=-1$, $a_{ij}=a_{ji}$ se $a_{ij}=-a_{ji}$, e quindi $S=A$ ...).

Per fissare le idee supponiamo:  $(m\geq n)$

Allora $L=\left\{\left(\begin{matrix}a_{11} & & 0\\ a_{ij} & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{matrix}\,\middle|\, 0\right) \mid a_{ij}\in K\right\}$

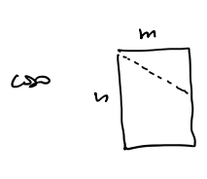
$=\langle\{e_{ij} \text{ con } i\geq j\}\rangle$

e questa è una base di L, che quindi ha dimensione $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Invece $U=\left\{\left(\begin{matrix}a_{11} & & a_{ij}\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{matrix}\,\middle|\, a_{ij}\right): a_{ij}\in K\right\}$

$=\langle\{e_{ij},\ i\leq j\}\rangle$

ed è base di U, che dunque ha dimensione
$1+2+\dots+n+n(m-n)=\frac{n(n+1)}{2}+n(m-n)$
$=\frac{n(n+1+2m-2n)}{2}$
$=\frac{n(2m+1-n)}{2}$

Cosa cambia nel caso  $(n\geq m)$?

$L\cap U=\{A: a_{ij}=0 \text{ se } i\neq j\}$
$=\left\{\left(\begin{matrix}a_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{matrix}\,\middle|\, 0\right)\ a_{ii}\in K\right\}$
$=\langle\{e_{ii} \mid i=1,\dots,n\}\rangle$
dunque ha dimensione n

d'altra parte

$\dim_K(L+U)=\dim_K(L)+\dim_K(U)-\dim(L\cap U)$
$=\frac{n(n+1)}{2}+\left(\frac{n(n+1)}{2}+n(m-n)\right)-n$
$=n(n+1)+n(m-n)-n=n\cdot m$

che è la dimensione di V, quindi $L+U=V$

In particolare ogni matrice $A\in V$ si scrive come somma
$A=B+C$ con $B\in L$, $C\in U$
ma non in modo unico perché $U\cap L\neq\langle 0\rangle$;
possiamo scrivere

$$A=(a_{ij})=\left(\begin{matrix}a_{11}+\varepsilon_1 & & 0\\ a_{ij} & \ddots & \\ & & a_{nn}+\varepsilon_n\end{matrix}\,\middle|\, 0\right)+\left(\begin{matrix}-\varepsilon_1 & & a_{ij}\\ & \ddots & \\ 0 & & -\varepsilon_n\end{matrix}\,\middle|\, a_{ij}\right)$$

con parametri $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ qualsiasi.

⊙ $V=V_5(K)$
sia $U=\{v\in V: \begin{matrix}x_1+x_3+x_5=0,\\ x_2+x_4=0\end{matrix}\}$
e $W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

determinare: base per U
eq. cartesiane per W
basi ed eq. cart. per $U\cap W$, $U+W$
spazi complementari per $U, W, U\cap W, U+W$

U ha due equazioni INDIPENDENTI, quindi è un sottospazio di dimensione $n-2=5-2=3$ e ogni base ha 3 vettori:

se $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_5\end{pmatrix}\in U$ abbiamo $x_5=-x_1-x_3$, $x_4=-x_2$

dunque $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\-x_2\\-x_1-x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

e allora $U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ (si vede "subito" che sono 3 vettori lin. indip.)

W è generato da due vettori, che si vede "subito" essere lin. indip., quindi ha dim 2 e avrà 3 eq. cart. indip.

se $\underset{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_5\end{pmatrix}}{w}\in W$ allora $w=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

cioè $\begin{cases}x_1=\alpha+\beta\\ x_2=-\alpha+\beta\\ x_3=-\alpha+\beta\\ x_4=\alpha+\beta\\ x_5=\beta\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=\alpha+x_5\\ x_2=-\alpha+x_5\\ x_3=-\alpha+x_5\\ x_4=\alpha+x_5\rightarrow\alpha=x_4-x_5\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=x_4\\ x_2=-x_4+2x_5\\ x_3=-x_4+2x_5\end{cases}$

eliminiamo i parametri: prima $\beta=x_5$ poi $\alpha=$..

$\begin{cases}x_1-x_4=0\\ x_2+x_4-2x_5=0\\ x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}$

o anche:

II−III $\begin{cases}x_1-x_4=0\\ x_2-x_3=0\\ x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}$ //

Per trovare $U\cap W$ conviene mettere insieme le equazioni cartesiane:

$$\begin{matrix}U\\ \\ W\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_3+x_5=0\\ x_2+x_4=0\\ x_1-x_4=0\\ x_2-x_3=0\\ x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}$$

come "risolvere" il sistema?

$\rightsquigarrow$ $x_4=x_1$, $x_3=x_2$
I $x_1+x_2+x_5=0$
II $x_2+x_1=0\rightsquigarrow x_2=-x_1$
V $x_2+x_1-2x_5=0$

$\begin{cases}x_4=x_1\\ x_3=-x_1\\ x_5=0\\ x_2=-x_1\\ x_5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\\-x_1\\x_1\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

dunque $U\cap W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ ha dimensione 1, 4 equaz. cart. lin. indip. $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1-x_4=0\\ x_1-x_3=0\\ x_5=0\end{cases}$

Per la formula di Grassmann:

$\dim_K(U+W)=2+3-1=4$,

quindi $U+W\neq V$ ed è descritto da 1 eq. cartesiana

abbiamo

$U+W=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{gen. di }U},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{gen. di }W}\rangle$ ← inutile perché ∈U (soddisfa equazioni, è combinazione dei primi 3).

$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$

dunque $\begin{cases}x_1=\alpha\\ x_2=\beta\\ x_3=\gamma\\ x_4=-\beta+2\delta\\ x_5=-\alpha-\gamma+3\delta\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x_4=-x_2+2\delta\\ x_5=-x_1-x_3+3\delta\end{cases}$

$\rightsquigarrow 3(x_2+x_4)=2(x_1+x_3+x_5)$

$\boxed{2x_1-3x_2+2x_3-3x_4+2x_5=0}$

equazione cartesiana per $U+W$.

Per trovare spazi complementari a un sottospazio, basta completare una base del sottospazio a base di tutto V, e poi prendere lo spazio generato dai vettori aggiunti:

$U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ dalla base canonica posso scegliere

$\left\langle \text{"}, \text{"}, \text{"}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=V$

dunque posso usare $U'=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$\left\langle \text{"}, \text{"}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=V$

dunque posso scegliere $W'=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$ ...

⊙⊙ raccomandato!

Sia V spazio vettoriale su K,
$V=U\oplus W$ con $U,W\leq V$
$v\in V$ ma $v\notin U$, $v\notin W$
calcolare le dimensioni di $U+\langle v\rangle$
$W+\langle v\rangle$
e della intersezione $(U+\langle v\rangle)\cap(W+\langle v\rangle)$

generalizzare con $V=U\oplus W$
$\mathcal{W}\leq V$ tale che $U\cap\mathcal{W}=\langle 0\rangle$
$W\cap\mathcal{W}=\langle 0\rangle$

Usiamo la formula di Grassmann:

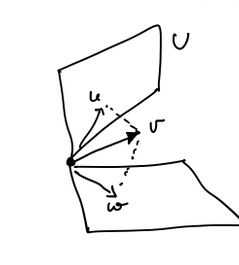
$\dim_K(U+\langle v\rangle)=\dim_K(U)+\dim_K\langle v\rangle-\dim_K(U\cap\langle v\rangle)$
ma $v\notin U$
dunque $\langle v\rangle\cap U=\langle 0\rangle$
$=\dim_K(U)+1$

$\dim_K(W+\langle v\rangle)=\dim_K(W)+1$

e

$\dim_K((U+\langle v\rangle)\cap(W+\langle v\rangle))=\dim_K(U+\langle v\rangle)+\dim_K(W+\langle v\rangle)$
$-\dim_K(\underset{\supseteq U+W=V}{U+\langle v\rangle+W+\langle v\rangle})$
$=\dim_K U+1+\dim_K W+1-\dim_K V$
$\begin{pmatrix}\text{ma } V=U\oplus W\\ \text{dunque } \dim_K V=\dim_K U+\dim_K W\end{pmatrix}=1+1=2$

perché 2? certo $U+\langle v\rangle$ e $W+\langle v\rangle$ contengono $\langle v\rangle$,
ma perché hanno intersezione di dim 2?



$v=u+w$ con $u\in U$
$w\in W$ (unicamente)
quindi $u\in U\leq U+\langle v\rangle$
$\in W+\langle v\rangle$ perché $u=\underset{W+\langle v\rangle}{v}-\underset{W}{w}$
dunque $u,w\in$ intersezione di $U+\langle v\rangle$ e $W+\langle v\rangle$!
e così
$(U+\langle v\rangle)\cap(W+\langle v\rangle)=\langle u,w\rangle$

generalizziamo:

$\dim_K(U+\mathcal{W})=\dim_K(U)+\dim_K(\mathcal{W})$ perché $\dim_K(\underset{=\langle 0\rangle}{U\cap\mathcal{W}})=0$

$\dim_K(W+\mathcal{W})=\dim_K(W)+\dim_K(\mathcal{W})$

e $\dim_K((U+\mathcal{W})\cap(W+\mathcal{W}))=\dim_K(U)+\dim_K(\mathcal{W})$
$+\dim_K(W)+\dim_K(\mathcal{W})$
$-\dim_K V=$
$=2\dim_K(\mathcal{W})$.

⊙⊙⊙ sistemi lineari con parametri

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+(1+\lambda)x_3+(1+\lambda)x_4=1+\mu\\ 2x_1+4x_2+(2+\lambda+\mu)x_3+(2+\lambda+\mu)x_4=3+\mu\end{cases}$$

discutere il sistema al variare dei parametri λ,μ.

matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1+\lambda & 1+\lambda & 1+\mu\\ 2 & 4 & 2+\lambda+\mu & 2+\lambda+\mu & 3+\mu\end{array}\right)\xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-\text{I}}$$

riduzione:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & \mu\\ 0 & 2 & \lambda+\mu & \lambda+\mu & \mu+1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{III}-2\text{II}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & \mu\\ 0 & 0 & \mu-\lambda & \mu-\lambda & 1-\mu\end{array}\right)$$

casi:	rango incompl.:	rango compl.:	soluzioni:
$\mu=\lambda$	2	3	$\left(\begin{smallmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&\lambda&\lambda&\mu\\0&0&0&0&1-\mu\end{smallmatrix}\right)$
$\mu\neq\lambda$	3	3	$\left(\begin{smallmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&\lambda&\lambda&\mu\\0&0&?&?&?\end{smallmatrix}\right)$

~~dim = 4−3 = 1~~
~~$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ soluzione sist. omog.~~
~~pongo $x_4=0$~~
~~trovo $x_3=\frac{1}{\mu-\lambda}$~~
~~poi $x_2=\mu-\lambda x_3=\mu-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$~~
~~poi $x_1=-x_2-x_3=-\mu+\frac{\lambda}{\mu-\lambda}-\frac{1}{\mu-\lambda}=-\mu+\frac{\lambda-1}{\mu-\lambda}$~~

$\lambda=\mu$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&\lambda&\lambda&\mu\\0&0&0&0&1-\mu\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&\lambda&\lambda&\lambda\\0&0&0&0&1-\lambda\end{array}\right)$$

rg incompl. = 2
(spazio vettoriale delle soluzioni del sist. omogeneo associato è di dim = $\underset{\#\text{inc.}}{4}-\underset{\text{rango}}{2}=2$)

rg compl. $=\begin{cases}2. & 1-\lambda=0.\\ 3.(>2) & 1-\lambda\neq 0\end{cases}$

soluzioni $=\begin{cases} & \lambda=1\\ \varnothing & 1-\lambda\neq 0\end{cases}$

ci sono soluzioni:
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$
$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2+x_3+x_4=1\end{cases}$

sist. omog. associato
$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-\alpha-\beta\\ x_3=\beta\\ x_4=\alpha\end{cases}$ $\left\langle\underset{\alpha}{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}},\underset{\beta}{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}\right\rangle$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\alpha-\beta\\ \beta\\ \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

sol. particolare $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ← $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_2=1\\ x_3=x_4=0\end{cases}$

morale $\lambda=\mu=1$
abbiamo
sol. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\lambda\neq\mu$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&\lambda&\lambda&\mu\\0&0&\lambda-\mu&\lambda-\mu&\mu-1\end{array}\right)$$

c'è soluzione perché rg inc. = rg compl. = 3
soluzioni sono $X_0+\langle\ \rangle$ dim 1 = $\underset{\#\text{inc.}}{4}-3$

sistema omogeneo:
$x_3=-\alpha$
$x_4=\alpha$
$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&\lambda&\lambda&0\\0&0&*&*&0\end{array}\right)$ sol $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}: \alpha\in K\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$
$x_1+\dots=0$
$x_2+\lambda x_3+\lambda x_4=0$
$x_3+x_4=0$

$(\lambda-\mu)x_3+(\lambda-\mu)x_4=0$
‖‖
$\cancel{(\lambda-\mu)}(x_3+x_4)=0$

sol. particolare
$x_4=0\Rightarrow x_3=\frac{\mu-1}{\lambda-\mu}$
$\Rightarrow x_2=\mu-\lambda x_3-\cancel{\lambda x_4}$
$=\mu-\lambda\frac{\mu-1}{\lambda-\mu}$
$=\frac{\dots}{\lambda-\mu}$?
$\Rightarrow x_1=1-x_2-x_3-\cancel{x_4}$
$=1-\left(\mu-\lambda\frac{\mu-1}{\lambda-\mu}\right)-\frac{\mu-1}{\lambda-\mu}$
$=\frac{\dots}{\lambda-\mu}$?

soluzioni $=\begin{pmatrix}\vdots\\(\lambda,\mu)\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

− 14/11/2022 −

aggiunto del 16/11/2022

$V=M_3(K)$

U_R = matrici tali che le somme sulle 3 righe sia la stessa

U_C = matrici tali che la somma sulle 3 colonne sia la stessa

(sottospazi?)

dim, basi, eq. cartesiane $U_R, U_C, U_R\cap U_C, U_R+U_C$

U_R è sottospazio.
se $A,B\in U_R\Rightarrow A+B\in U_R$
$\alpha A\in U_R$
infatti
somma delle righe di A $=c_a$ costante
" " " di B $=c_b$
per $A+B$ la somma su una riga dà la somma della riga di A e di quella di B,
$\underbrace{\overset{\text{"}}{(a_{ij})}\ \overset{\text{"}}{(b_{ij})}}_{(a_{ij}+b_{ij})}$
dunque $=c_a+c_b$ costante

U_C sottospazio ~

$x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_{21}-x_{22}-x_{23}=0$

$$U_R=\left\{A=(x_{ij}): \begin{matrix}x_{11}+x_{12}+x_{13}=x_{21}+x_{22}+x_{23}\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=x_{31}+x_{32}+x_{33}\end{matrix}\right\}$$

$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ ↕ $\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\\x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\\x_{31}\\x_{32}\\x_{33}\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1&0\end{array}\right)$$

$\dim_K(U_R)=9-2=7$

sistema di equazioni cartesiane indipendenti

Per trovare una base risolvo il sistema lineare:
$x_{11}=-x_{12}-x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}$
$x_{21}=-x_{22}-x_{23}+x_{31}+x_{32}+x_{33}$

$$\begin{cases}x_{11}=-\alpha-\beta+(-\gamma-\delta+\varepsilon+\varphi+\eta)+\gamma+\delta=-\alpha-\beta+\varepsilon+\varphi+\eta\\ x_{12}=\alpha\\ x_{13}=\beta\\ x_{21}=-\gamma-\delta+\varepsilon+\varphi+\eta\\ x_{22}=\gamma\\ x_{23}=\delta\\ x_{31}=\varepsilon\\ x_{32}=\varphi\\ x_{33}=\eta\end{cases}$$

$$U_R=\left\{\begin{pmatrix}-\alpha-\beta+\varepsilon+\varphi+\eta & \alpha & \beta\\ -\gamma-\delta+\varepsilon+\varphi+\eta & \gamma & \delta\\ \varepsilon & \varphi & \eta\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\varphi,\eta\in K\right\}$$

$$=\left\{\alpha\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \mid \alpha\dots\right\}$$

$=\langle(\ \ ),(\ \ ),(\ \ ),(\ \ ),(\ \ ),(\ \ ),(\ \ )\rangle$

Alternativa:

U_R contiene matrici del tipo:

$\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \delta&\varepsilon&\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon\\ \varphi&\eta&\alpha+\beta+\gamma-\varphi-\eta\end{pmatrix}$ somme $=\alpha+\beta+\gamma$, al variare di $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\eta$

‖

$\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
$+\delta\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$

queste 7 matrici sono generatori per U_R,
controllo che sono lin. indip. (FACILE!),
quindi sono base, $\dim_K(U_R)=7$

U_C stesse cose:

sist. eq. cartesiane:
$$\begin{cases}x_{11}+x_{21}+x_{31}-x_{12}-x_{22}-x_{32}=0\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}-x_{13}-x_{23}-x_{33}=0\end{cases}$$

generatori:
$\begin{pmatrix}\alpha&\delta&\varphi\\ \beta&\varepsilon&\eta\\ \gamma&\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon&\alpha+\beta+\gamma-\varphi-\eta\end{pmatrix}$ ⇐

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\dots\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

dimensione 7.

lunedì 21/11
lezione 7,30

Scelta più semplice calcolare $U_R\cap U_C$

① usando equazioni cartesiane:

U_R $\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$

U_C $\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1&0&1&-1&0\\0&1&-1&0&1&-1&0&1&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1\\1&-1&0&1&-1&0&1&-1&0\\0&1&-1&0&1&-1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{III}-\text{I}}$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1\\0&-2&-1&2&0&1&1&-1&0\\0&1&-1&0&1&-1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$\text{III}+2\text{IV}$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1\\0&0&-3&2&2&-1&-1&1&-2\\0&1&-1&0&1&-1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

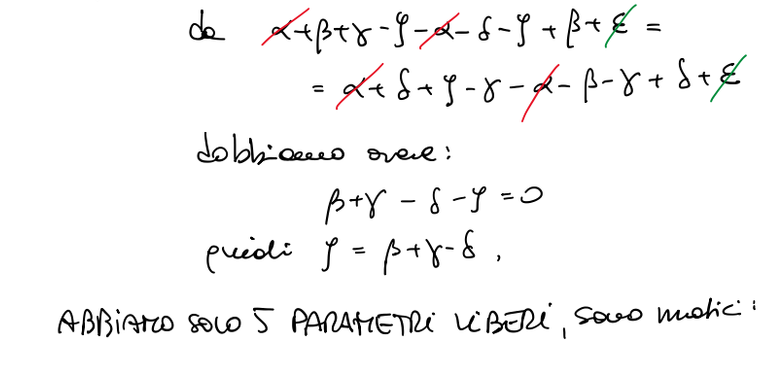
$\dim(U_R\cap U_C)=9-4=5$

$\Rightarrow\dim(U_R+U_C)=7+7-5=9$
$U_R+U_C=M_3(K)$ //

(dunque ogni matrice in $M_3(K)$ si scrive come somma di una con somma delle righe costante e una con somma delle colonne costante, ma non in modo unico, anzi in funzione di 5 parametri arbitrari....).

② le matrici di $U_R\cap U_C$ sono quelle tali che la somma sulle righe è uguale E la somma sulle colonne è uguale

sono matrici del tipo:



$\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \delta&\varepsilon&\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon\\ \varphi&\square&▨\end{pmatrix}$ ← (riga somma) $\alpha+\beta+\gamma$

$\alpha+\delta+\varphi$ (somma colonne)

$\boxed{\alpha+\delta+\varphi-\beta-\varepsilon}$

righe: $\alpha+\beta+\gamma-\varphi-(\alpha+\delta+\varphi-\beta-\varepsilon)$
colonne: $\alpha+\delta+\varphi-\gamma-(\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon)$

da $\cancel{\alpha}+\beta+\gamma-\varphi-\cancel{\alpha}-\delta-\varphi+\beta+\cancel{\varepsilon}=$
$=\cancel{\alpha}+\delta+\varphi-\gamma-\cancel{\alpha}-\beta-\gamma+\delta+\cancel{\varepsilon}$

dobbiamo avere:
$\beta+\gamma-\delta-\varphi=0$
quindi $\varphi=\beta+\gamma-\delta$,

ABBIAMO SOLO 5 PARAMETRI LIBERI, sono matrici:

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \delta&\varepsilon&\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon\\ \beta+\gamma-\delta&\boxed{\alpha+\gamma-\varepsilon}&\boxed{\delta-\gamma+\varepsilon}\end{pmatrix}$$

$\alpha+\cancel{\delta}+\cancel{\beta}+\gamma-\cancel{\delta}-\cancel{\beta}-\varepsilon$
$\alpha+\gamma-\varepsilon$

$\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}+\cancel{\gamma}-(\cancel{\beta}+\cancel{\gamma}-\delta)-(\cancel{\alpha}+\gamma-\varepsilon)$
$\delta-\gamma+\varepsilon$

quindi uno spazio di dimensione 5
con base
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ //