Geo1-22/9-22-Sezione2
[illegible]

SPAZI VETTORIALI: basi e dimensione (Fine settimana)

- Insiemi generatori
- Insiemi liberi (Eli. dualità)
- Basi
- Teorema di Steinitz: dimostrazione in due giorni
  - (Unicità di Steinitz, teorema del completamento)
- Dimensioni: prodotti, somme, sottospazi
  - Formula di Grassmann e applicazioni

{ AGL10, cap 2 - par. 9, 8 }

Esercizio:

Sia V lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ e W il piano $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(1) Determinare una base di W.

(2) Determinare un sottospazio U di V di dimensione 1 tale che $U \oplus W = V$.

(3) Determinare un sottospazio U di V di dimensione 1 tale che $U \cap W = \{0\}$.

(4) Determinare un sottospazio U di V di dimensione 1 tale che $U \subset W$.

Se si, specificare una e soltanto la condizione che definisce U dal precedente quesito $\frac{3}{1/2}$.

Nota: Nella scuola dei numeri $W_k(n) = V$ $\{A \in (a_{ij}) \in V$ tale che $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$

$U = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

$U = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

insieme che sono sottospazi.

Trovare basi e dimensioni di $U, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$.

U non è dato che sono unici e non sono tutti.

Come basi di una matrice A $\{a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$

$U_1 = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

$U_2 = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

$U_3 = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

$U_4 = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

$U_5 = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

$U_6 = \{A \in V \quad a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j\}$

Proposizione:

Spazi vett. definizione (e conseguenze)

esempi: $V_n(K)$

$M_{m,n}(K)$

$K[x]$, $K[x]_n$

K^n

K^∞ o $K^{\mathbb{N}}$ con X insieme qualsiasi.

Siano assegnati due spazi vettoriali:

V, W spazi vettoriali: $V \times W$

$V \times W$ è uno spazio vettoriale: $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$

$\begin{cases} (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\ \lambda \cdot (v, w) = (\lambda v, \lambda w) \end{cases}$

$\pi_V : V \times W \to V$, $\pi_W : V \times W \to W$

$\pi_V(v, w) = v$, $\pi_W(v, w) = w$

π_V e π_W sono lineari e suriettive.

Sistema fondamentale di generatori di $V \times W$:

$\{(v, 0), (0, w) \mid v \in V, w \in W\}$

$\{(v, 0), (0, w) \mid v \in \mathcal{B}_V, w \in \mathcal{B}_W\}$

V spazio vett. $U \subseteq V$ sottospazio

$U \subseteq V$ sottospazio proprio: $U \subsetneq V$

$U \subseteq V$ sottospazio banale: $\{0\}$ o V

$U_1, U_2 \subseteq V$ sono $U_1 \cap U_2$ sottospazio

$U_1 \cup U_2$ non è sottospazio

$U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$

$U_1 + U_2$ è sottospazio

$U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$

$U_1 + U_2$ è il più piccolo sottospazio che contiene $U_1 \cup U_2$

$\mathcal{P}(V) \xrightarrow{\cup, \cap, +} \mathcal{P}(V)$

$\cup, \cap, +$ non sono iniettive

Sottospazi:

V spazio vettoriale

U sottospazio

$V \setminus U$ è sottospazio?

allora $V/U + V/U$ è spazio vettoriale.

allora $\pi_U : V \to V/U$ è lineare.

Teorema fondamentale del sottospazio dagli spazi vettoriali:

Esempio: sia $V_n(K)$ spazio vettoriale

$\mathcal{P}_n\left(\binom{n}{k}\right)$ è uguale alla cardinalità dei sottoinsiemi di K di cardinalità k.

$= \pi_n\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \dots + \binom{n}{0}$

$\pi_n(n) = \pi_n(n-1) + \pi_n(n-1)$

$V_n(K) = \pi_n(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$\pi_n(n) = \pi_n(n-1) + \pi_n(n-1)