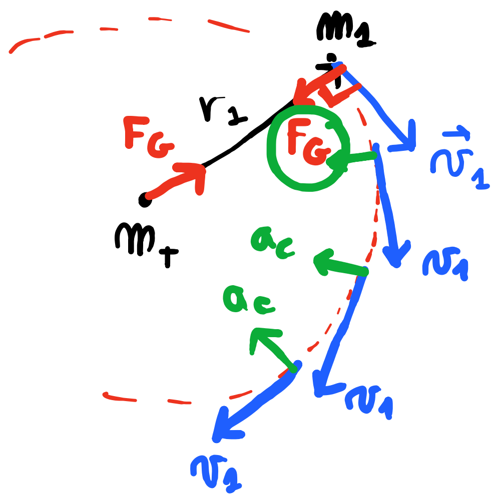
Tutorato 9 (canale 2)

8.1 Un satellite artificiale terrestre descrive un'orbita circolare di raggio $r_1 = 9.3 \cdot 10^6$ m rispetto al centro della terra. La velocità sull'orbita è $v_1 = 6.56 \cdot 10^3$ m/s. Calcolare: a) il valore del prodotto $\gamma\, m_T$. Un secondo satellite descrive un'orbita circolare di raggio $r_2 = 8.1 \cdot 10^6$ m. Calcolare: b) quanto deve valere il rapporto tra la massa m_2 del secondo satellite e la massa m_1 del primo satellite affinché l'energia meccanica dei due satelliti sia eguale.

$r_1 = 9{,}3 \cdot 10^6\ m$

$v_1 = 6{,}56 \cdot 10^3\ m/s$

$\gamma m_T = ?$



moto circolare uniforme

$$F_G = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$\boxed{F_G = F_c} = m_1 a_c$$

$$\gamma \frac{m_T \cancel{m_1}}{r_1^{\cancel{2}}} = \cancel{m_1} \frac{v_1^2}{\cancel{r_1}} \rightarrow \boxed{v_1^2 = \frac{\gamma m_T}{r_1}}$$

vale per un (m) qualsiasi corpo che orbita attorno ad un altro (M) quando $m \ll M$

$$\gamma m_T = v_1^2 r_1 = 4{,}00 \cdot 10^{14}\ \frac{m^3}{s^2}$$

$$\left[3{,}98 \cdot 10^{14}\ \frac{m^3}{s^2}\right]$$

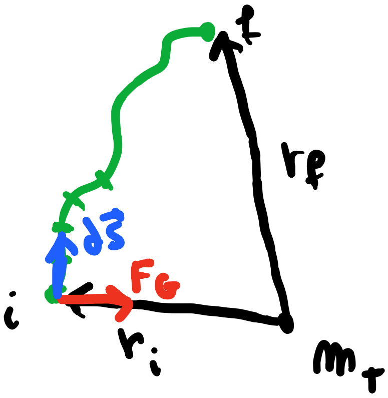
b) c'è un secondo satellite m_2 con $r_2 = 8{,}1 \cdot 10^6\ m$.

$\frac{m_2}{m_1} = ?$ Sapendo che $E_{m_1} = E_{m_2}$.

teoria:

$$E_m = E_K + E_P$$

$$W^{F_G} = -\Delta E_p$$



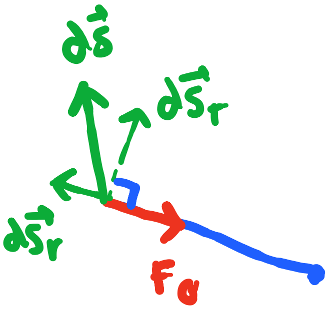
$$d\vec{s} = d\vec{s}_r + d\vec{s}_T$$

$$W^{F_G} = \int_i^f \vec{F}_G \cdot d\vec{s} = \int_i^f \vec{F}_G \cdot d\vec{s}_r + \underbrace{\cancel{\vec{F}_G \cdot d\vec{s}_T}}_{=0} =$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} F_G \, dr = \int_{r_i}^{r_f} -\gamma \frac{mM}{r^2} \, dr$$

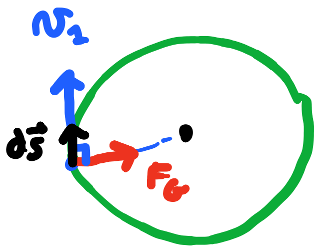
$$= +\gamma m M \left[\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f} = \underbrace{\frac{\gamma m M}{r_f}}_{-E_{p_f}} - \underbrace{\frac{\gamma m M}{r_i}}_{-E_{p_i}}$$

$$= -\Delta E_p = -(E_{p_i} - E_{p_f})$$



$$\boxed{E_p := -\frac{\gamma m M}{r}}$$

$$\Delta E_m = 0$$



$$\begin{cases} E_{m_1} = E_{K_1} + E_{p_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \gamma \frac{m_1 m_T}{r_1} \\ \quad \parallel \\ E_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \gamma \frac{m_2 m_T}{r_2} \end{cases}$$

$$\boxed{F_c = F_G} \rightsquigarrow m_2 \frac{v_2^2}{r_2} = \gamma \frac{m_2 m_T}{r_2^2} \rightsquigarrow \boxed{v_2^2 = \frac{\gamma m_T}{r_2}}$$

$$\boxed{v_1^2 = \frac{\gamma m_T}{r_1}}$$

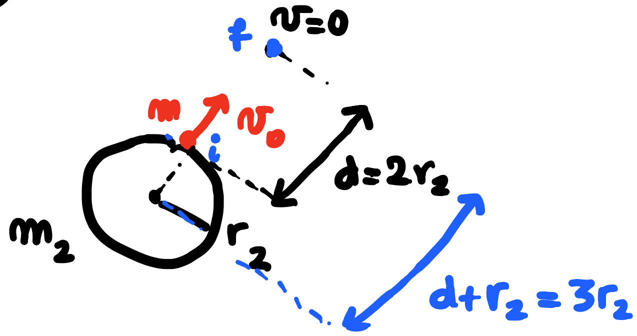
$$\frac{1}{2} m_1 \frac{\cancel{\gamma m_T}}{r_1} - \frac{\cancel{\gamma} m_1 \cancel{m_T}}{r_1} = \frac{1}{2} m_2 \frac{\cancel{\gamma m_T}}{r_2} - \frac{\cancel{\gamma} m_2 \cancel{m_T}}{r_2}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{m_1}{r_1} = -\frac{1}{2} \frac{m_2}{r_2} \rightsquigarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{r_2}{r_1} = 0{,}871$$

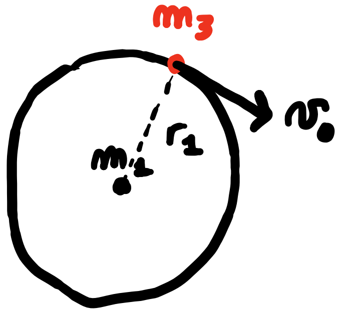
8.3 Un corpo di dimensioni trascurabili, lanciato radialmente dalla superficie di un pianeta di massa m_2 e raggio r_2 con velocità iniziale v_0, si arresta alla distanza $d = 2r_2$ dalla superficie del pianeta. Si osserva che v_0 è anche il valore della velocità di un corpo che descrive un'orbita circolare di raggio $r_1 = 4.6\, r_2$ attorno a un pianeta di massa m_1. Calcolare il rapporto m_2 / m_1.

$$\frac{m_2}{m_1} = ?$$

A



B



$$r_1 = 4{,}6\, r_2$$

A $\quad \Delta E_m = 0$

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$$

$$\underbrace{\cancel{E_{Kf}}}_{=0} + E_{pf} - E_{Ki} - E_{pi} = 0$$

$$-\gamma \frac{m_2 \cancel{m}}{3r_2} - \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 + \gamma \frac{m_2 \cancel{m}}{r_2} = 0$$

$$\gamma \frac{m_2}{r_2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} v_0^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m_2 = \frac{1}{2}\frac{r_2}{\gamma}\frac{3}{2} v_0^2 = \frac{3}{4} v_0^2 \frac{r_2}{\gamma}}$$

B usiamo le stesse considerazioni fatte nei problemi precedenti : $F_G = F_c$

$$\frac{\gamma \cancel{m_3} m_1}{r_1^{\cancel{2}}} = \cancel{m_3} \frac{v_0^2}{\cancel{r_1}} \rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{\gamma m_1}{r_1}}$$

$$r_1 = 4{,}6\, r_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0^2 = \dfrac{\gamma m_1}{4{,}6\, r_2} \\ m_2 = \dfrac{3}{4} v_0^2 \dfrac{r_2}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{4}\frac{\cancel{\gamma} m_1}{4{,}6 \cancel{r_2}}\frac{\cancel{r_2}}{\cancel{\gamma}}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{4}\frac{1}{4{,}6} = 0{,}163$$

8.8 Un satellite artificiale, di massa $m = 10^3$ kg, ruota attorno alla terra descrivendo un'orbita circolare di raggio $r_1 = 6.6 \cdot 10^3$ km. Si porta il satellite a descrivere una diversa orbita circolare di raggio $r_2 = 6.8 \cdot 10^3$ km. Calcolare: a) quanto lavoro bisogna spendere in questo processo, b) la differenza di periodo tra i moti lungo le due orbite.

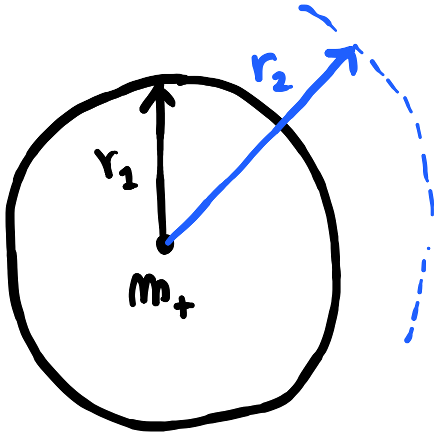
$m = 10^3$ Kg

$r_1 = 6{,}6 \cdot 10^3$ Km

$r_2 = 6{,}8 \cdot 10^3$ Km

a) W da spendere nel processo

b) $T_2 - T_1 = ?$



$\Delta E_m = W^{nc} = W$ minimo da spendere

$E_{m2} - E_{m1}$

FORMULA: $\boxed{E_m = \frac{1}{2} E_p}$ vale solo se il corpo ruota con orbita e velocità cost.

$F_G = F_c$

$\Downarrow$

$v^2 = \frac{\gamma M}{r}$

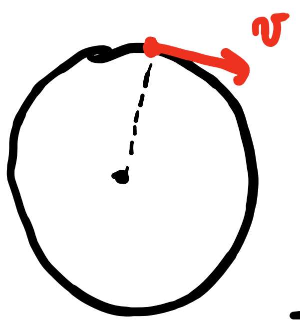
$E_m = E_K + E_p$

$= \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r}$

$= \frac{1}{2} m \frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma m M}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\gamma M m}{r} = \frac{1}{2} E_p$

$W^{sp} = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = \frac{1}{2} E_{p2} - \frac{1}{2} E_{p1}$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\gamma m_T m}{r_2} + \frac{\gamma m_T m}{r_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma m m_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 8{,}87 \cdot 10^8$ J



$$v = \omega r$$

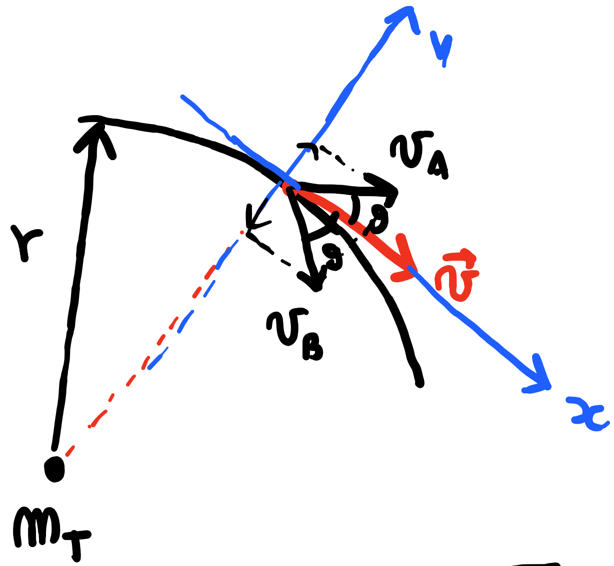
$$\theta(t) = \omega t \qquad 2\pi = \theta(t=T) = \omega T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{v_1/r_1} = \frac{2\pi r_1}{\sqrt{\frac{\gamma m_T}{r_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{\gamma m_T}} = 5340\ s$$

$$T_2 = \dots = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{\gamma m_T}} = 5585\,s \qquad \Rightarrow T_2 - T_1 = 245\,s$$

8.11 Un satellite artificiale di massa m = 300 kg ruota attorno alla terra su un'orbita circolare di raggio r = $7 \cdot 10^4$ km. Una improvvisa esplosione divide il satellite in due frammenti A e B di masse $m_A = 3/5$ m e m_B = 2/5 m. I due frammenti, dopo l'esplosione, si mantengono nel piano dell'orbita del satellite e le loro velocità v_A e v_B formano gli angoli $\theta_A = 30°$ e $\theta_B = -30°$ con la velocità iniziale del satellite $\boldsymbol{v}$ al momento dell'esplosione. Calcolare: a) le velocità dei due frammenti, b) la loro energia meccanica.



$m = 300$ Kg

$r = 7 \cdot 10^4$ Km

$m_A = \frac{3}{5} m$

$m_B = \frac{2}{5} m$

$\theta = 30°$

$v_A = ?$

$v_B = ?$

$$\sum \vec{F}^{(E)} = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{p}_i = \vec{p}_f}$$

E_{mA}, E_{mB} subito dopo l'esplosione.

scompongo lungo x e y. appena prima e appena dopo l'esplosione

x: $P_{ix} = mv$ $\qquad P_{fx} = m_A v_A \cos\theta + m_B v_B \cos\theta$

y: $P_{iy} = 0$ $\qquad P_{fy} = m_A v_A \sin\theta - m_B v_B \sin\theta$

$$\begin{cases} mv = (m_A v_A + m_B v_B)\cos\theta \\ 0 = (m_A v_A - m_B v_B)\cancel{\sin\theta} \end{cases}$$

$$v_A = \frac{m_B}{m_A} v_B = \frac{2/5\, \cancel{m}}{3/5\, \cancel{m}} v_B = \frac{2}{3} v_B$$

$$\cancel{m}v = \left(\frac{3}{5}\cancel{m}\boxed{\frac{2}{3}v_B} + \frac{2}{5}\cancel{m}v_B\right)\cos\theta$$

$$v = \left(\frac{4}{5}v_B\right)\cos\theta \Rightarrow v_B = \frac{5}{4}\frac{v}{\cos\theta} = 3445\ m/s$$

$$v_A = \frac{2}{3}v_B = 2297\ m/s$$

$F_c = F_G$ prima dell'esplosione

$$v^2 = \frac{\gamma m_T}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma m_T}{r}} = 2387\ \frac{m}{s}$$

b) $E_{m_A}, E_{m_B} = ?$

$$E_{m_A} = E_{K_A} + E_{P_A} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 - \frac{\gamma m_A m_T}{r}$$

$E_m < 0 \Rightarrow$ orbita ellittica

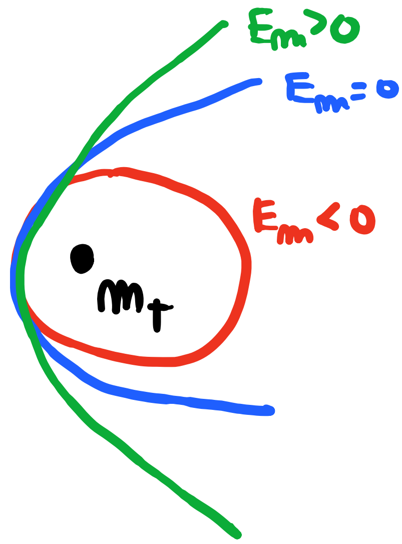
$E_m = 0 \Rightarrow$ parabolica

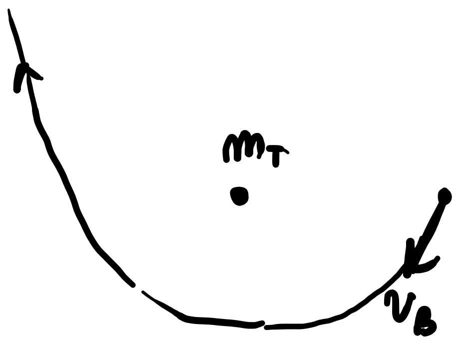
$E_m > 0 \Rightarrow$ iperbolica

$$= -5{,}51 \cdot 10^{8}\ J < 0$$

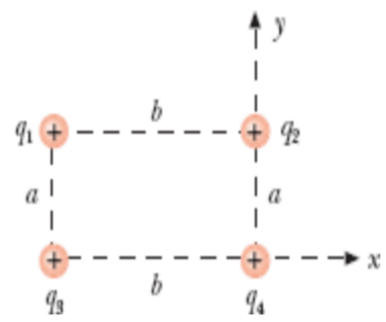
$$E_{m_B} = \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{\gamma m_B m_T}{r} = 2{,}83 \cdot 10^{7}\ J > 0$$

B dopo un punto di minimo si allontanerà indefinitamente dalla terra

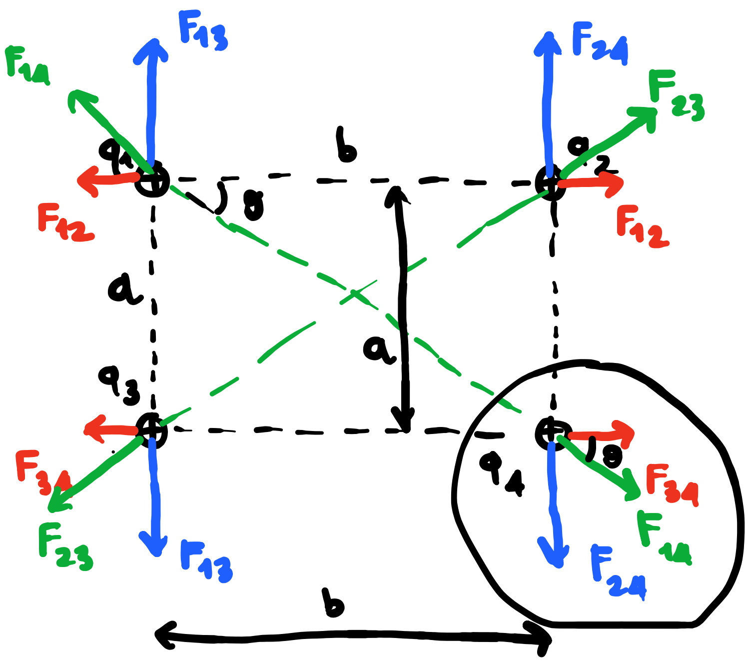




1.6 Quattro cariche uguali $q_i = q = 2 \cdot 10^{-8}$ C sono poste sui vertici di un rettangolo di lati $a = 10$ cm e $b = 20$ cm. Calcolare la forza **F** esercitata dalle altre tre cariche su q_4.



$$q_i = q = 2 \cdot 10^{-8}\ C$$
$$a = 10\ cm$$
$$b = 20\ cm$$
$$F_4 = ?$$



Legge di Coulomb

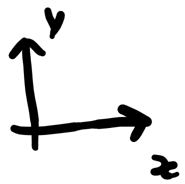
$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

$$F_{34} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{b^2}$$

$$F_{24} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}$$

$$F_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2+b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = 26{,}6°$$



$$x: \quad F_{34} + F_{14}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\cos\theta}{a^2+b^2}\right) = 1{,}54 \cdot 10^{-4}\ N$$

$$y: \quad -F_{24} - F_{14}\sin\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\sin\theta}{a^2+b^2}\right) = -3{,}92 \cdot 10^{-4}\ N$$

$$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2} = 4{,}21 \cdot 10^{-4}\ N$$

$$\alpha = \arctan\left|\frac{F_{4y}}{F_{4x}}\right| = 68{,}6°$$