Tutorato 8 (canale 2)

7.4 Lungo un piano inclinato ($\theta = 30°$) vengono fatti scendere due cubi di eguale massa $m = 2$ kg, con diverso coefficiente di attrito con il piano ($\mu_1 = 0.4$ per quello a valle, $m_2 = 0.2$ per quello a monte). I cubi, inizialmente fermi e distanti $d = 1$ m, vengono liberati simultaneamente all'istante $t = 0$. Calcolare: a) dopo quanto tempo si urtano, b) la velocità del sistema immediatamente dopo il contatto se i cubi rimangono attaccati, c) l'accelerazione con cui scende il sistema dopo l'urto, d) la forza F che il cubo a monte esercita su quello a valle.

$m = 2\,kg \qquad \mu_1 = 0{,}4$

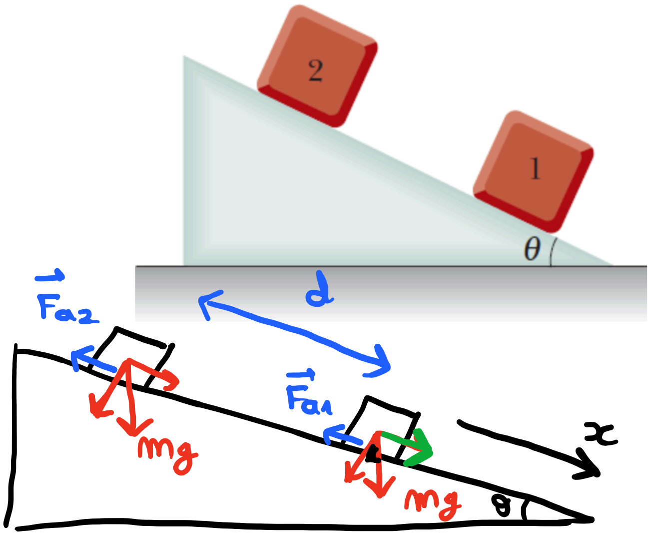
$d = 1\,m \qquad \mu_2 = 0{,}2$

a) t^* in cui si urtano

$$F_{ai} = N\mu_i = mg\cos\theta\,\mu_i$$

$$F_{a1} > F_{a2}$$

$$\Rightarrow a_2 > a_1$$



II^a legge per ① e poi per ②

① $mg\sin\theta - F_{a1} = ma_1 \Rightarrow a_1 = g(\sin\theta - \mu_1\cos\theta)$

② $mg\sin\theta - F_{a2} = ma_2 \Rightarrow a_2 = g(\sin\theta - \mu_2\cos\theta)$

• $t^* = ?$

$$a_{21}(t) = a_2(t) - a_1(t) = g(\cancel{\sin\theta} - \mu_2\cos\theta - \cancel{\sin\theta} + \mu_1\cos\theta)$$

acc. del corpo 2 rispetto al corpo 1

$$= g\cos\theta(\mu_1 - \mu_2) > 0$$

$$= 1{,}70\ m/s^2 = cost.$$

secondo il corpo 1, il corpo 2 si muove di moto unif. acc. con acc $= a_{21}$.

$$x_{21}(t) = \underbrace{x_{21}(0)}_{= -d} + \underbrace{\cancel{v_{21}(0)}}_{=0} t + \frac{1}{2}a_{21}t^2$$

$v_{21} = v_2 - v_1$

impongo $\boxed{x_{21}(t = t^*) = 0}$

$$-d + \frac{1}{2} a_{21} t^{*2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \left(\frac{2d}{a_{21}}\right)^{1/2} = 1{,}085\,s$$

b) v_f (dopo l'urto), se 1 e 2 rimangono attaccati.

↳ COMPLETAMENTE ANELASTICO

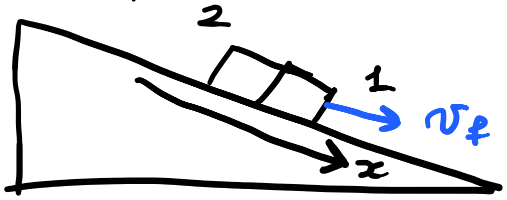
$$\begin{cases} P_i = P_f \\ v_{1f} = v_{2f} \end{cases}$$

"ANELASTICO"

$P_i = P_f$

ELASTICO $\Rightarrow \begin{cases} P_i = P_f \\ \Delta E_m = 0 \end{cases}$

URTO, $t = t^*$



i: subito prima dell'urto

v_f subito dopo l'urto.

• $\boxed{P_i = P_f}$ $\quad$ $\boxed{v_{1f} = v_{2f}}$

$$\cancel{m} v_{1i} + \cancel{m} v_{2i} = 2\cancel{m} v_f$$

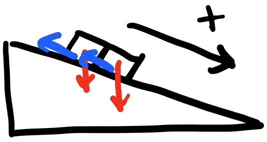
$$v_{1i} = v_1(t^*) = a_1 t^*$$

$$v_{2i} = v_2(t^*) = a_2 t^*$$

$$v_f = \frac{1}{2}(v_{1i} + v_{2i}) = \frac{1}{2} t^* (a_1 + a_2)$$

$$= \frac{1}{2} t^* g \left(2 \sin\theta - \cos\theta\,(\mu_1 + \mu_2)\right) = 2{,}56\, m/s$$

c) $|\vec{a}|$ dopo l'urto ?



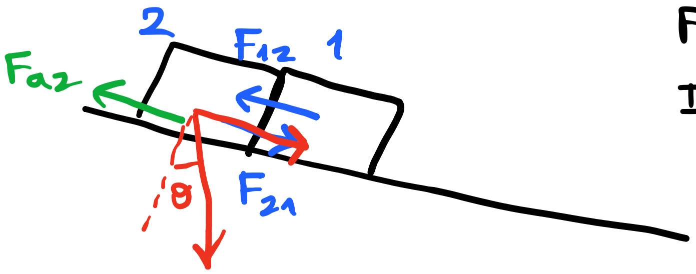
II^a legge su 1 + 2

$$2mg\sin\theta - F_{a1} - F_{a2} = (2m)\,a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left[g\sin\theta - g\cos\theta\,(\mu_1 + \mu_2)\right] = \underbrace{2{,}35}\ m/s^2$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

d) Forza che ② esercita su ① dopo l'urto



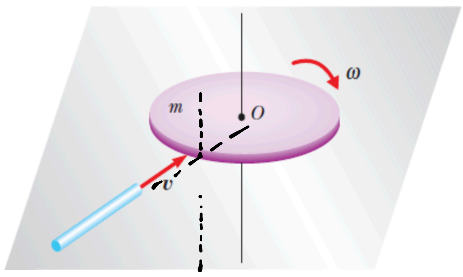
$F_{21} = ?$

II^a legge solo su ②

$$m_2 g \sin\theta - F_{a_2} - F_{12} = m_2 a$$

$$F_{12} = m g \sin\theta - m g \cos\theta \mu_2 - m a$$
$$= 1{,}71 \text{ N} = F_{21}$$

7.27 Sopra un piano orizzontale liscio è posto un disco, di massa $m = 0.1$ kg e raggio $R = 10$ cm, che ruota con velocità angolare costante $\omega = 40$ rad/s attorno a un asse verticale passante per il centro O. Una sbarretta di massa m e lunghezza R si muove sul piano con velocità costante $v = 4$ m/s lungo una linea retta passante per O. A un certo istante la sbarretta urta il bordo del disco e vi rimane attaccata, in direzione radiale. Se l'asse di rotazione è fisso, calcolare: a) la velocità angolare ω' del sistema disco-sbarretta dopo l'urto. Se invece il disco è libero di muoversi, calcolare dopo l'urto: b) la velocità del CM del sistema, c) la velocità angolare ω''.



$\left.\begin{array}{l} m = 0{,}1 \text{ Kg} \\ R = 10 \text{ cm} \\ \omega = 40 \text{ rad/s} \end{array}\right\}$ DISCO

$\left.\begin{array}{l} m \\ R \end{array}\right\}$ SBARRETTA

$v = 4$ m/s

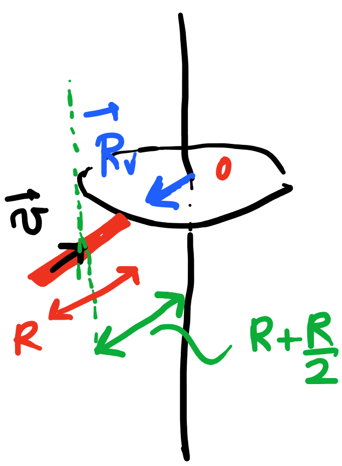
URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO (tra corpi RIGIDI)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}^{(E)} \neq 0$$

Reazioni vincolari al vincolo

$\vec{p}$ non si conserva $\Rightarrow$ $\boxed{P_i \neq P_f}$

a) ASSE FISSO, ω' dopo l'urto



$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \Sigma \vec{M}_o^{(E)} = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_i = L_f}$$

$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p}$ $\longrightarrow$ per un corpo che ruota $\boxed{L = I\omega}$

$d = R$

$$\begin{cases} L_i^{SB} = 0 & \vec{r} \,//\, \vec{p} \\ L_i^{D} = I_D \omega \end{cases}$$

$L_f = I^{TOT} \omega'$ incognita

$$I_{TOT} = I_D + \frac{1}{12} m d^2 + m\left(\frac{3}{2}R\right)^2 = \frac{17}{6} m R^2$$

$\boxed{L_i = L_f}$ $\rightsquigarrow$ $I_D \omega = I^{TOT} \omega'$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{I_D}{I^{TOT}}\omega = \frac{\frac{1}{2} m \cancel{R^2}}{\frac{17}{6} m \cancel{R^2}}\omega = \frac{3}{17}\omega$$

$$= 7{,}06 \text{ rad/s}$$

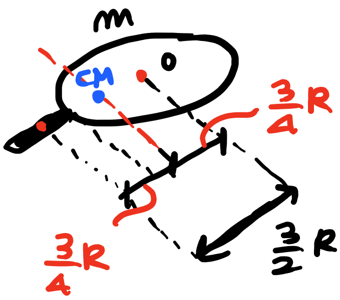
b) disco è libero di muoversi. $v_{CM} = ?$, $\omega'' = ?$

$\Sigma F^{(E)} = 0$ (non c'è più la R_v)

$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma F^{(E)} = 0 \Rightarrow \boxed{p_i = p_f}$

i = subito prima dell'urto

f = subito dopo



$$\begin{cases} p_i^{D+SB} = m v + m \cdot \boxed{0} \\ p_f^{D+SB} = 2m v_{CM} \end{cases}$$

$\leftarrow$ v_{CM} DISCO (i)

$$\Rightarrow \cancel{m} v = 2\cancel{m} v_{CM}$$

$$v_{CM} = \frac{v}{2} = 2 \text{ m/s}$$

non ho $F^{(E)} \Rightarrow M^{(E)} = 0 \Rightarrow \boxed{L_i = L_f}$

$$\begin{cases} L_i = I\omega + \boxed{0} \\ L_f = I_{CM}\omega'' \end{cases}$$

$\uparrow$ MOMENTO D'INERZIA DEL SISTEMA ATTORNO AL SUO CM

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2 + m\left(\frac{3}{4}R\right)^2 + \frac{1}{12} m R^2 + m\left(\frac{3}{4}R\right)^2 = \frac{41}{24} m R^2$$

$$I\omega = I_{CM}\omega'' \Rightarrow \omega'' = \frac{\frac{1}{2} m R^2}{\frac{41}{24} m R^2}\omega = \frac{12}{41}\omega = 11{,}71 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

7.30 Un'asta lunga l = 1.2 m può ruotare, in un piano verticale, attorno al proprio centro O; la massa dell'asta vale M = 2.5 kg. Un punto materiale di massa m = 0.25 kg, lanciato verticalmente dal basso verso l'alto, colpisce l'asta, inizialmente ferma, a distanza R = 0.4 m da O e rimane a essa attaccato; la velocità di m all'istante dell'urto vale v = 20 m/s. Calcolare: a) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, b) la variazione di energia cinetica del sistema nell'urto e c) la velocità angolare del sistema quando ha compiuto una rotazione di 90°.

$l = 1{,}2\ m$

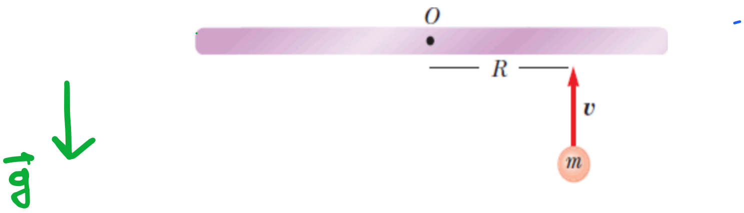
$M = 2{,}5\ kg$

$m = 0{,}25\ kg$

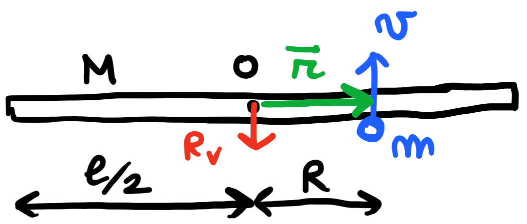
$R = 0{,}4\ m$

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

$v = 20\ m/s$



a) ω subito dopo l'urto



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}^{(E)} \neq 0 \qquad \boxed{p_i \neq p_f}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{M}^{(E)} = 0} \Rightarrow \boxed{L_i = L_f} \quad \text{RISPETTO } O$$

$$L_i = \underbrace{Rmv}_{\vec{r}\times\vec{p}} + \overset{M}{0}$$

L_i dato dalla m

$$L_f = I_o \omega_f \qquad \text{dove} \qquad I_o = \frac{1}{12}Ml^2 + mR^2$$

mR^2: momento di inerzia di un punto materiale a distanza R dall'asse.

$$Rmv = I_o \omega_f$$

$$\Rightarrow \omega_f = \frac{Rmv}{I_o} = 5{,}88\ rad/s$$

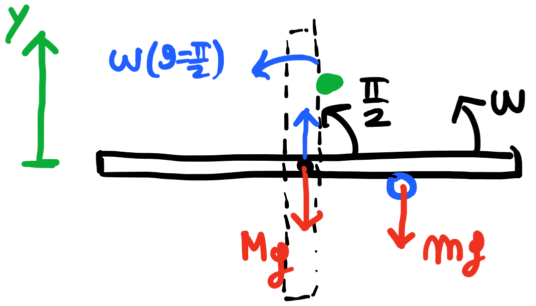
c) ΔE_K durante l'urto

$$E_{Ki} = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$E_{Kf} = \frac{1}{2}I_o\omega^2$$

$$\Rightarrow \Delta E_K = \frac{1}{2}I_o\omega^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -44{,}12\ J$$

d) $\omega(\theta = \frac{\pi}{2})$



BILANCIO DI ENERGIA TRA
$\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$

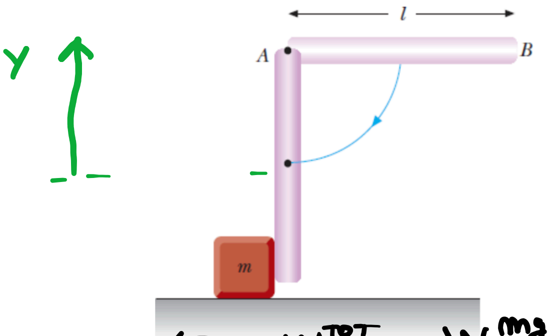
$$\Delta E_K = W^{TOT}$$

$$E_{Kf} - E_{Ki} = -\Delta U + \cancel{W^{nc}}^{=0}$$

$$\frac{1}{2} I_O \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_O \omega^2 = -(\underbrace{mgR - 0}_{mgh_f - mgh_i})$$

$$\Rightarrow \omega_f = \left[\omega^2 - \frac{2mgR}{I_O}\right]^{1/2} = 5{,}37 \text{ rad/s}$$

7.29 Un'asta AB, di lunghezza l = 1.2 m e massa M = 0.5 kg, è incernierata nel suo estremo A a un perno fisso orizzontale e può oscillare senza attrito in un piano verticale. Nell'istante $t = 0$ l'asta, che è in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera da ruotare. Raggiunta la posizione verticale l'asta urta un piccolo oggetto, inizialmente fermo, di massa $m = 0.25$ kg, che parte con velocità v_0 orizzontale, mentre l'asta si ferma. Calcolare: a) la velocità angolare dell'asta un istante prima dell'urto, b) la velocità v_0, c) l'energia cinetica dissipata nell'urto e d) l'impulso durante l'urto.



$\ell = 1{,}2\,m$

$M = 0{,}5\,kg$

$m = 0{,}25\,kg$

$v_f^{ASTA} = 0$

a) $\omega_i = ?$ SUBITO PRIMA DELL'URTO

$$\Delta E_K = W^{TOT} = W^{mg} + \underbrace{\cancel{W^{R_V}}}_{=0} = -\Delta U$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} I_A \omega^2 - 0 = -(\underbrace{\cancel{Mgh_f}}_{=0} - Mgh_i) = Mg\frac{\ell}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \omega = \left(\frac{Mg\ell}{I_A}\right)^{1/2} = 4{,}95\ rad/s$$

$$I_A = \frac{1}{3}M\ell^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

b) $v_0 = ?$

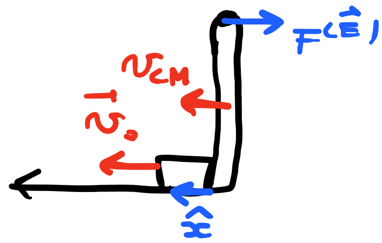
$$0 = \Sigma M_A^{(E)} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \Rightarrow L_i = L_f$$ RISPETTO AL POLO A

$$L_i = I_A\omega = m\ell v_0 = L_f$$

$\vec{r} \times m\vec{v}$

$$\rightarrow v_0 = \frac{I_A\omega}{m\ell} = 3{,}96\ \frac{m}{s}$$

d) $\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I_A\omega^2 = -0{,}98\ J$



e) l'impulso durante l'urto

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = m\vec{v}_0 - M\vec{v}_{CM} = m\vec{v}_0 - M\omega\frac{\ell}{2}\hat{x} = -0{,}495\ Ns\ \hat{x}$$

$$\Sigma\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{L = cost.} \Rightarrow L_f = L_i$$

$$\Sigma\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \not\Rightarrow P_i = P_f$$

se $F^{(E)} \neq 0$