Tutorato 7 (canale 2)

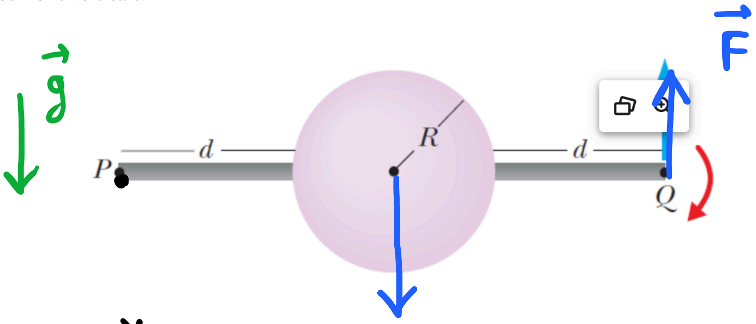
6.25 Un corpo rigido è costituito da un'asta, di massa m_2 = 2 kg e lunghezza d = 0.15 m, da un disco di massa m_1 = 6 kg e raggio R = 0.1 m e da una seconda asta eguale alla prima; i tre corpi sono connessi come in figura. Il sistema giace in un piano verticale e può ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale passante per il punto P e ortogonale al disegno. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio, con le aste orizzontali, tramite l'applicazione di una forza verticale **F** all'estremo Q. Calcolare: a) il valore di **F** e della reazione $\mathbf{R}_N$ in P. A un certo istante la forza **F** cessa di agire e il sistema è libero di ruotare. Calcolare: b) la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ quando le aste sono in posizione verticale.

$m_2 = 2\,\text{Kg}$

$d = 0{,}15\,\text{m}$

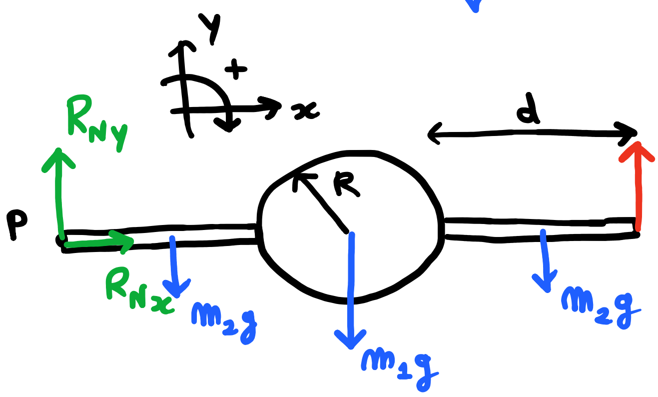
$m_1 = 6\,\text{Kg}$

$R = 0{,}1\,\text{m}$



a) $F = ?$

R_N in $P = ?$



$$\Sigma F_x = M a_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R_{Nx} = 0}$$

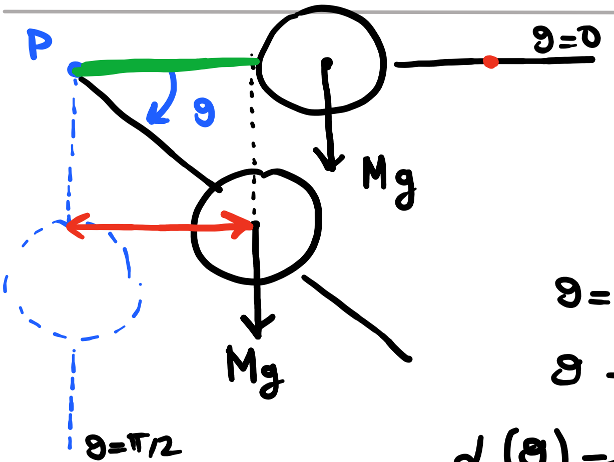
$$\begin{cases} \Sigma F_y^{(E)} = R_{Ny} - (m_1 + 2m_2) g + F = 0 \\ \Sigma M_P^{(E)} = m_2 g \frac{d}{2} + m_1 g (d+R) + m_2 g \left(d + 2R + \frac{d}{2}\right) - F(2d+2R) = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow F = \frac{g}{2(d+R)} \left[m_2 \frac{d}{2} + m_1 (d+R) + m_2 \left(2R + \frac{3}{2} d\right) \right] =$$

$$= \frac{g}{2\cancel{(d+R)}} \left[\cancel{(d+R)} (2m_2 + m_1) \right] = 49{,}05\ \text{N}$$

$$\hookrightarrow R_{Ny} = (m_1 + 2m_2) g - F = 49{,}05\ \text{N}$$

b) $F = 0, \quad \omega\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) = ?$



$$\sum M_p^{(E)} = I_p \alpha$$

$\alpha \neq$ cost.

$M = m_1 + 2m_2$

$$\theta = 0 \rightarrow \sum M_p^{(E)} = Mg\,(d+R)$$

$$\theta \rightarrow \sum M_p^{(E)} = Mg\,(d+R)\cos\theta$$

$$\alpha(\theta) = \frac{\sum M_p^{(E)}}{I_p} = Mg\,\frac{(d+R)\cos\theta}{I_p}$$

OSSERVO CHE QUANDO $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} \longrightarrow \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

$$\int_0^{\pi/2} \alpha\, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_f} \omega\, d\omega = \frac{1}{2}\omega_f^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\omega_0^2}}_{=0}$$

$$\omega_f = \omega\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \left[2\int_0^{\pi/2} \alpha(\theta)\, d\theta\right]^{1/2}$$

$$= \left[2\int_0^{\pi/2} \frac{Mg\,(d+R)}{I}\cos\theta\, d\theta\right]^{1/2} = \left[\frac{2Mg\,(d+R)}{I}\cdot(\underset{\sin\pi/2}{1} - \underset{\sin 0}{0})\right]^{1/2}$$

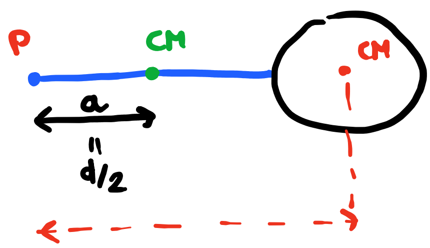
$$= 7{,}91 \text{ rad/s}$$

$$I_p = I_p^{sb1} + I_p^{DISCO} + I_p^{sb2}$$

Teorema di Huygens $\quad I_p = I_{CM} + ma^2$

$$I_p^{sb1} = \underbrace{\frac{1}{12}m_2 d^2}_{I_{CM}^{sb1}} + m_2\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}m_2 d^2$$



$$I_p^{DISCO} = \frac{1}{2}m_1 R^2 + m_1 (d+R)^2$$

$$I_P^{SB2} = \frac{1}{12} m_1 d^2 + m_1\left(d + 2R + \frac{d}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_P = \sum I_P^i = \boxed{0{,}785\ \mathrm{kg\,m^2}}$$

- METODO 2 (consigliato)

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA $\Delta E_K = W^{TOT}$

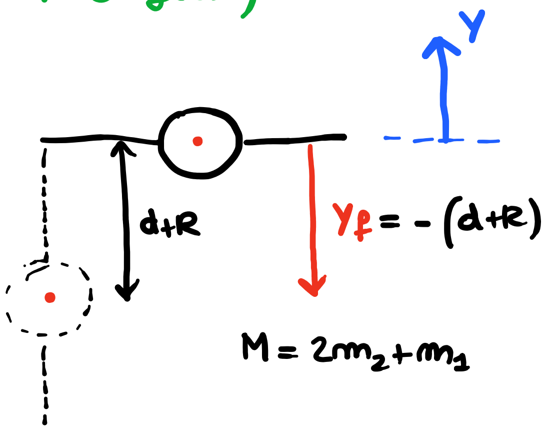
(LA R_V non fa lavoro dato che P è fisso)

$$\Delta E_K = -\Delta U$$

$$E_{Kf} - E_{Ki} = -(U_f - U_i)$$

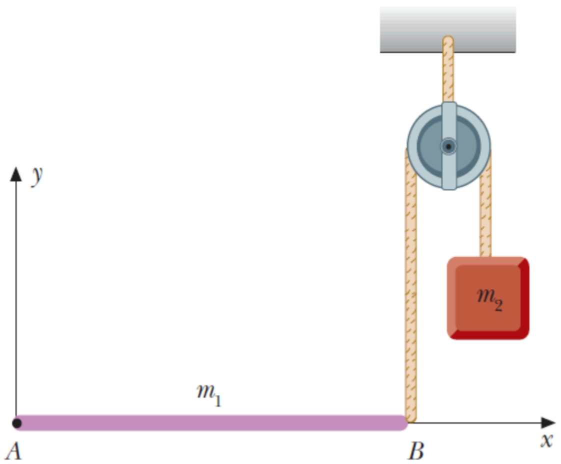
$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 - 0 = -(M g y_f - 0)$$

$$\Rightarrow \omega_f = \left(\frac{2Mg(d+R)}{I_P}\right)^{1/2} = 7{,}91\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

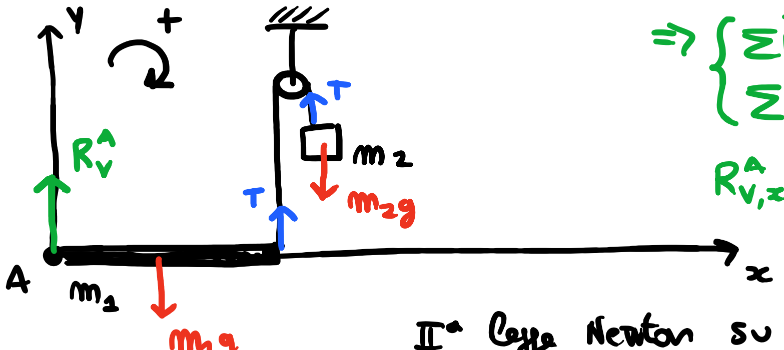


$M = 2m_2 + m_1$

6.22 Un'asta rigida di massa m_1 e lunghezza $d = 0.8$ m è incernierata nell'estremo A ed è appesa nell'estremo B a un filo collegato alla massa $m_2 = 10$ kg; il sistema è in equilibrio con l'asta orizzontale. a) Calcolare: a) il valore della reazione vincolare in A. Si taglia il filo in B e l'asta ruota sotto l'azione della forza di gravità; nel vincolo A agisce un momento che si oppone alla rotazione, $\mathbf{M} = k\,\theta\,\mathbf{u}_z$, con $k = 50$ N m/rad e θ angolo che l'asta forma con l'asse x. Calcolare: b) la velocità angolare dell'asta quando $\theta = \pi/2$.



$d = 0{,}8\,\mathrm{m}$
$m_2 = 10\ \mathrm{kg}$
$R_V^A = ?$
$\vec{M} = k\theta\,\hat{u}_z$
$k = 50\ \mathrm{Nm/rad}$



il sistema è in equilibrio

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases}$$

$$R_{V,x}^A = 0$$

II^a legge Newton su m_2

$$-m_2 g + T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = m_2 g$$

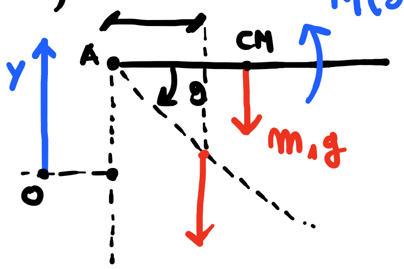
SULLA SBARRETTA

$$\begin{cases}\sum F_y = R_V^A - m_1 g + T = 0 \\ \sum M_A = m_1 g \frac{\cancel{d}}{2} - T \cancel{d} = 0\end{cases} \rightarrow m_1 = \frac{2T}{g} = \frac{2m_2 \cancel{g}}{g} = 2m_2$$

$$m_1 = 20 \text{ Kg}$$

$$R_V^A = m_1 g - T = 2m_2 g - m_2 g = m_2 g = 98{,}1 \text{ N}$$

b)



$$M(\theta) = \boxed{K\theta} \rightsquigarrow \sum M = I\alpha$$

$$\rightsquigarrow \alpha = \alpha(\theta)$$

oppure $\rightarrow$ $\boxed{\text{bilancio di energia}}$

$$\Delta E_K = W^{TOT}$$

$$\begin{cases} f: & \theta = \pi/2 \\ i: & \theta = 0 \end{cases}$$

$$E_{Kf} - E_{Ki} = -\Delta U + W^M$$

$$\frac{1}{2} I_A \omega_f^2 - 0 = -(m_1 g \underbrace{\cancel{h_f}}_{=0} - m_1 g h_i) + - \int_0^{\pi/2} K\theta \, d\theta$$

$$W^F = \int_{x_0}^{x} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

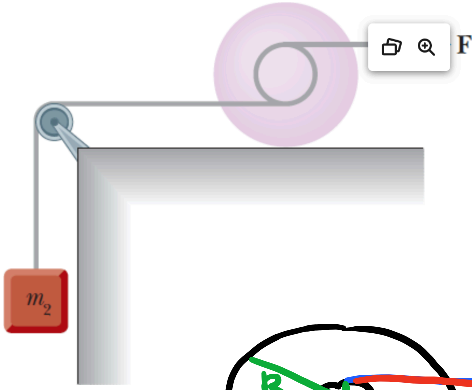
$$W^M = \int_{\theta_0}^{\theta} M \, d\theta$$

$$\frac{1}{2} I_A \omega_f^2 = m_1 g \frac{d}{2} - K \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

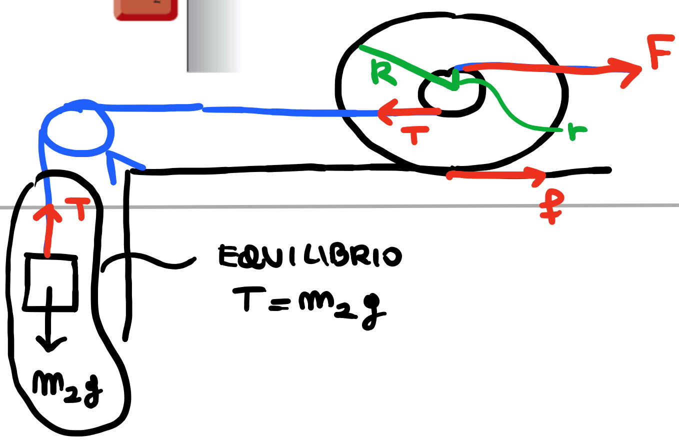
$$\omega_f = \left[\frac{2}{I_A}\left(m_1 g \frac{d}{2} - K \frac{\pi^2}{4}\right)\right]^{1/2} = 2{,}80 \text{ rad/s}$$

$$I_A = \frac{1}{3} m_1 d^2 = \frac{1}{12} m_1 d^2 + m_1 \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

6.40 Una sfera, di raggio R = 15 cm e massa m_1 = 24 kg, è poggiata sopra un piano orizzontale; il coefficiente di attrito statico è μ_s = 0.2. Nella sfera è praticata una piccola scanalatura, di raggio r = 6 cm, trascurabile a tutti gli effetti. Nella scanalatura è avvolto un filo inestensibile che sostiene un corpo di massa m_2, come mostrato in figura. Tramite la forza orizzontale F, applicata a distanza r dal centro, è possibile mantenere il sistema in equilibrio statico. Calcolare: a) il valore massimo di m_2 che consente l'equilibrio del sistema e il corrispondente valore di F. Si recide il legame con m_2 e la sfera avanza sotto l'azione di F. Determinare: b) se il moto è di puro rotolamento.



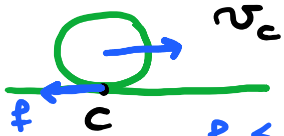
$R = 15$ cm
$m_1 = 24$ kg
$I_{SF} = \frac{2}{5} m_1 R^2$
$\mu_s = 0,2$
$r = 6$ cm
m_{2max} che consente l'equilibrio, $F = ?$



EQUILIBRIO
$T = m_2 g$

c'è equilibrio statico

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

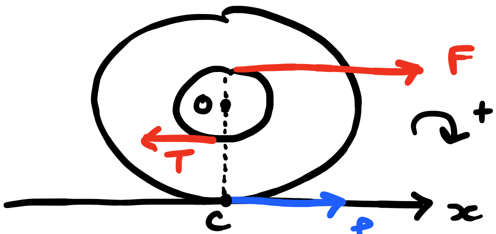


$v_c = 0$

$f \le N \mu_s$

$$\begin{cases} a_{CM} = \alpha R \\ v_{CM} = \omega R \end{cases}$$

PER LA SFERA
$$\begin{cases} \Sigma F = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Sigma F_x = F - T + f = 0 \\ \Sigma M_c = F(R+r) - T(R-r) = 0 \end{cases}$$

$T = m_2 g$

m_2 massima per avere equilibrio $\Rightarrow f = f_{max} = N\mu_s = m_1 g \mu_s$

$F = T - f$

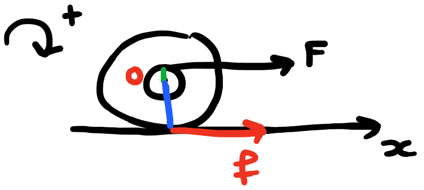
(2) $\Rightarrow$ $(T-f)(R+r) - T(R-r) = 0$

$\cancel{TR} + Tr - fR - fr - \cancel{TR} + Tr = 0$

$T(2r) = f(R+r) \Rightarrow T = \frac{f(R+r)}{2r} = 82,4$ N

$F = T - f = 35,3$ N $\rightarrow T = m_2 g \rightarrow m_2 = \frac{T}{g} = 8,4$ kg

b) si toglie il filo e F rimane. E' moto di PR?



$$\begin{cases} \Sigma F_x = F + f = m_1 a_{CM} \\ \Sigma M_O = Fr - fR = I_O \alpha = I_O \frac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

RICAVO f e VERIFICO CHE

$f \leq f_{max}$

SE È VERO IL MOTO È DI PURO ROTOLAMENTO

(1) $a_{CM} = \frac{F+f}{m_1}$

(2) $Fr - fR = I_O \frac{F+f}{m_1} \frac{1}{R} \rightsquigarrow f = \frac{F(r - \frac{2}{5}R)}{\frac{7}{5}R} = 0 \text{ N} \leq f_{max}$

$\Rightarrow$ MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

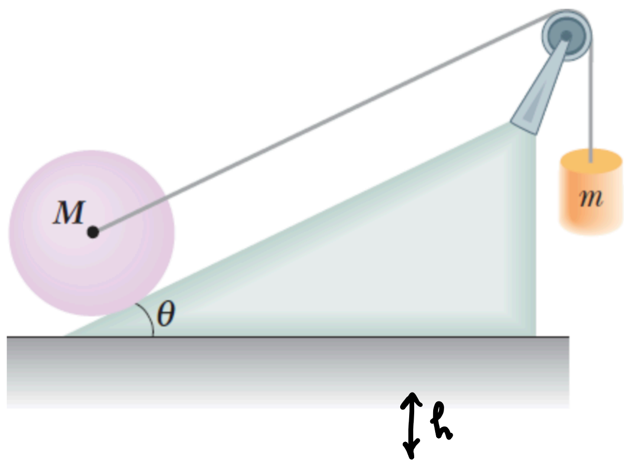
6.42 Un disco di massa M = 8 kg e raggio R è posto sopra una guida inclinata con angolo θ = 30°; all'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa m = 6 kg. Il filo è teso con la massa m bloccata a distanza h = 1.5 m dal suolo. All'istante t = 0 si lascia libera la massa m che inizia a scendere, facendo contemporaneamente salire il disco lungo la guida. Il moto del disco è di puro rotolamento. Calcolare: a) l'accelerazione con cui scende la massa m, b) la velocità con cui la massa m tocca il suolo, c) la quota massima raggiunta dal centro del disco, misurata rispetto alla quota che lo stesso centro aveva per t = 0.

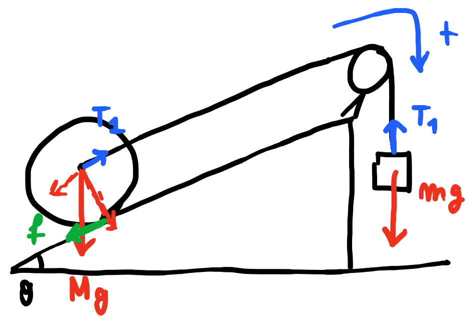
$M = 8$ kg, R

$\theta = 30°$, $m = 6$ kg

$h = 1{,}5$ m

a) $\vec{a}_m = ?$





$$f = \frac{T_1 - Mg\sin\theta}{1 + \underbrace{\frac{mR^2}{I}}_{=2}}$$

f in generale è diversa da f_{max} ($f \leq f_{max}$ nel MPR)

II^ legge su M e m

$$\begin{cases} m: \; mg - T_1 = ma \\ M: \; T_1 - f - Mg\sin\theta = Ma \end{cases} \rightarrow a = g - \frac{T_1}{m}$$

$$\frac{mR^2}{I} = \frac{mR^2}{\frac{1}{2}mR^2} = 2$$

$\hookrightarrow \quad T_1 - \frac{T_1 - M g \sin\theta}{3} - M g \sin\theta = M\left(g - \frac{T_1}{m}\right)$

$\Rightarrow \quad T_1\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{M}{m}\right) = Mg\left(\sin\theta - \frac{\sin\theta}{3} + 1\right) \Rightarrow \quad T_1 = 52{,}32 \text{ N}$

$\Rightarrow \quad a = g - \frac{T_1}{m} = 1{,}09 \text{ m/s}^2$

b) velocità con cui la massa tocca il suolo
si potrebbe usare l'energia ma è più veloce:

$v(h)^2 = \cancel{v_0^2} + 2ah$

$\Rightarrow \quad v(h) = (2ah)^{1/2} = 1{,}81 \text{ m/s}$

c) quota massima raggiunta dal disco rispetto alla posizione iniziale.

notare : f non compie lavoro perché il moto è di puro rotolamento $\Rightarrow v_c = 0$

DIVIDO IN DUE TRATTI e

$h_1 = h\sin 30°$, h_2 tratto percorso dopo che m ha toccato il suolo. In tale istante il disco ha E_k:

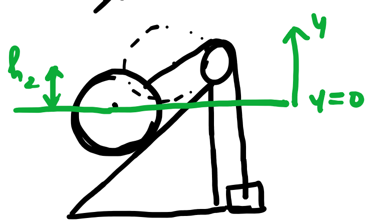
$E_k = \frac{1}{2}M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M v(h)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v(h)}{R}\right)^2$ $\quad v_{cm} = \omega r$

$I = \frac{1}{2}mR^2$

$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M\cancel{R^2}\frac{v^2}{\cancel{R^2}} = \frac{3}{4}Mv^2$

$\Delta E_m = 0$

$\hookrightarrow \quad \cancel{E_{kf}} + E_{pf} = E_{ki} + \cancel{E_{pi}}$



$0 - \cancel{M}gh_2 = \frac{3}{4}\cancel{M}v^2 + 0$

$\Rightarrow \quad h_2 = \frac{3}{4}\frac{v^2}{g} = 0{,}25 \text{ m}$

$\Rightarrow \quad h_{TOT} = h_1 + h_2 = h\sin 30° + h_2 = 1\text{m}$