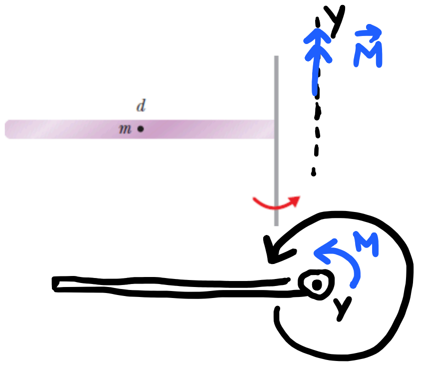
Tutorato 6 (canale 2)

6.2 Un'asta rigida, di massa $m = 4$ kg e lunghezza $d = 0.6$ m, può ruotare senza attrito in un piano orizzontale attorno a un asse verticale passante per un suo estremo. All'asta, inizialmente ferma, è applicato un momento parallelo all'asse di rotazione di valore $M = 0.9$ N m. Calcolare dopo $n = 10$ giri: a) la velocità angolare dell'asta, b) l'accelerazione del centro di massa. Al compimento del decimo giro il momento cessa di agire; l'asta continua a girare, però essendo in realtà presente un momento di attrito di valore $M/100$ (trascurato nella prima domanda) il moto è decelerato. Calcolare: c) il numero di giri N compiuto dall'asta prima di fermarsi.

$m = 4$ kg
$d = 0{,}6$ m
$\omega_0 = 0$ rad/s
$M = 0{,}9$ Nm



DOPO $N = 10$ giri
$\boxed{\omega = ?}$
$a_{CM} = ?$

- MOMENTO D'INERZIA, dipende solo da MASSA e GEOMETRIA

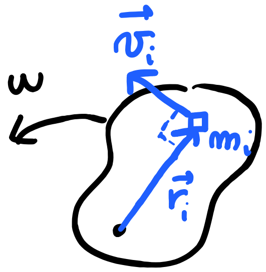
DALL'ASSE DI ROT.

DISTRIB. MASSA

$$I := \sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2$$

dove r_i è la distanza di m_i dall'asse di rotazione

$$\sum \vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{m} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

per un corpo rigido che ruota

$|\vec{v}_i| = \omega r_i$
$\vec{v}_i \perp \vec{r}_i$
$\Rightarrow |\vec{v}_i \times \vec{r}_i| = v_i r_i$

$$L = \sum_{i=1}^{m} r_i m_i v_i = \sum_{i=1}^{m} r_i m_i \omega r_i$$

$$= \omega \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2}}_{I} = \omega I$$

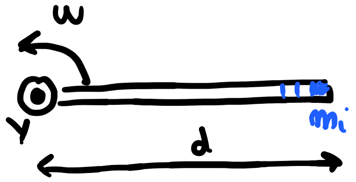
corpo rigido che ruota

$$\sum \vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega I) = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

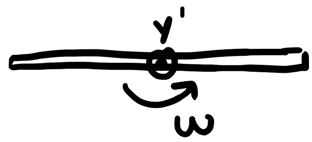
$$\boxed{\sum M_y^{(E)} = I_y \alpha} \longleftrightarrow \boxed{\sum F^{(E)} = ma}$$

ROTATORIO — analogia — LINEARE

LA RESISTENZA AL MOTO ROTATORIO



$$I_y = \frac{1}{3} m d^2$$



$$I_{y'} = \frac{1}{12} m d^2$$

$M = 0{,}9\ Nm$

$I_y = \frac{1}{3} m d^2 = 0{,}48\ Kg\, m^2$

voglio applicare ⤷ $\sum \vec{M}_y^{(E)} = I_y \alpha$

$$M = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I} = 1{,}88\ \frac{rad}{s^2}$$

se $\sum M^{(E)} = cost. \Rightarrow \alpha = cost.$

MOTO ROTATORIO unif. ACCELERATO

$$\boxed{\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0 + \alpha t \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(\vartheta)^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha\vartheta \end{aligned}}$$

$\omega(\vartheta = 2\pi N) = ?$

$$[\omega(\vartheta = 2\pi N)]^2 = \cancel{\omega_0^2}^{=0} + 2\alpha\, 2\pi N$$

$$\omega(\vartheta = 2\pi N) = (4\pi\alpha N)^{1/2} = 15{,}35\ \frac{rad}{s}$$

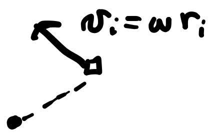
$$\boxed{\text{se } \alpha \neq cost. \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\, dt}$$

METODO (consigliato)

⇒ BILANCIO DI ENERGIA

vogliamo usare $\boxed{\Delta E_K = W^{TOT}}$

corpo rigido che ruota.



$$E_K = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \boxed{\sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

ho solo $M \longrightarrow W^M = ?$

$\underbrace{dE_K}_{} = dW$

$\hookrightarrow \ d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = I\omega\, d\omega$

$$W^M = \int dW^M = \int dE_K = \int I\omega\, d\omega = \int I \frac{d\theta}{dt} d\omega = \int I\alpha\, d\theta$$

$$\boxed{W^M = \int_0^{\Delta\theta} M\, d\theta = M\Delta\theta}$$

se M cost.

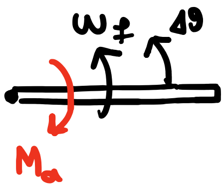
$$\sum \vec{M}^{(E)} = I\alpha$$

$$\Delta E_K = W$$

$$E_{Kf} - \cancel{E_{Ki}}^{=0} = W^M$$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 - 0 = M\, 2\pi N \ \hookrightarrow \ \omega_f = \left(\frac{4\pi M N}{I}\right)^{1/2} = 15{,}35\ \frac{rad}{s}$$

- dopo 10 giri, $M = 0$, $M_a = \frac{M}{100}$ (attrito)



$$\cancel{E_{Kf}}^{=0} - E_{Ki} = W^{M_a}$$

$$-\frac{1}{2}I\omega^2 = -M_a \Delta\theta = -M_a\, 2\pi\gamma$$

i : N giri

f : γ giri (FERMO)

$$\Rightarrow \gamma = \frac{I\omega^2}{4\pi M_a} = 1000 \text{ giri}$$

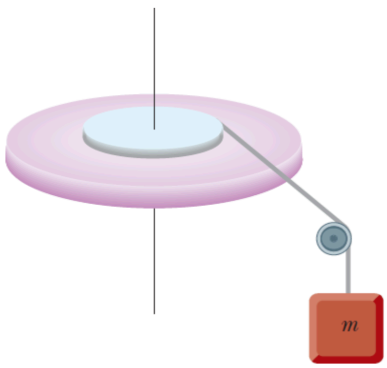
6.11 Due dischi di ferro, di raggi $R_1 = 0.1$ m e $R_2 = 2R_1$ e masse $M_1 = 2$ kg, $M_2 = 1.5\, M_1$, sono fissati solidamente uno all'altro in modo tale da risultare coassiali. Essi possono ruotare senza attrito attorno all'asse verticale passante per il centro di massa. Sul disco di raggio R_1 è avvolto un filo a cui è appesa la massa $m = 1$ kg. All'istante $t = 0$ la massa m, inizialmente in quiete, viene lasciata scendere. a) Calcolare il tempo t_0 necessario perché essa percorra $h = 10$ m. Sul bordo del disco di raggio R_2 è fissato un magnetino di massa $m_0 = 10^{-2}$ kg e dimensioni trascurabili; la forza magnetica che lo tiene attaccato al disco vale 1.5 N. b) Dire se al tempo t_0 il magnetino è ancora attaccato al disco.

$R_1 = 0{,}1$ m

$R_2 = 2R_1$

$M_1 = 2$ kg

$M_2 = 1.5\, M_1$

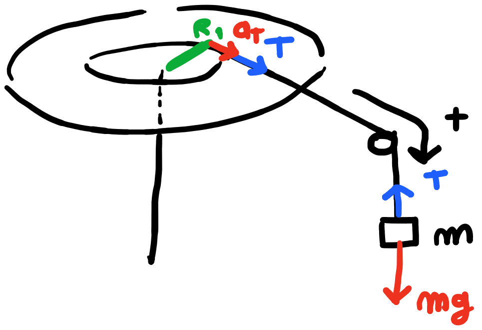


$$I_{CM}^{DISCO} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I_{CM}^{SFERA} = \frac{2}{5}mR^2$$

$m = 1$ kg

- $t_0 = ?$ tale che m scenda di $h = 10$ m



• II^a legge di Newton per m

1) $mg - T = ma$

• considero D_1 e D_2 e applico

$$\underbrace{\sum M^{CEI}}_{TR_1} = \underbrace{I^{SIST}}_{I_1 + I_2} \alpha$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 = 0{,}07\ kg\,m^2$$

2) $TR_1 = I^{SIST}\alpha$

osservo che $\alpha R_1 = a$

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR_1 = I\dfrac{a}{R_1} \end{cases} \rightarrow \quad mg - \frac{Ia}{R_1^2} = ma \qquad T = \frac{Ia}{R_1^2}$$

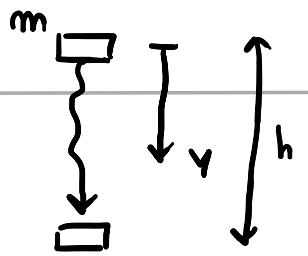
$$a\left(m + \frac{I}{R_1^2}\right) = mg$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg}{m + I/R_1^2} = 1{,}22\ m/s^2$$

$$y(t) = \cancel{y_0} + \cancel{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = y(t = t_0) = \frac{1}{2}at_0^2$$

$$\Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4{,}05\ s$$



METODO 2 :

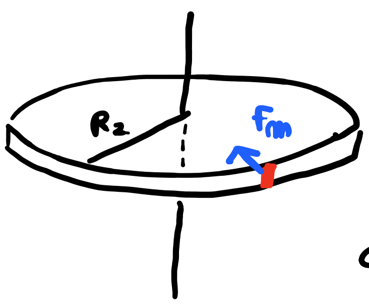
$$\Delta E_k = W^{TOT} = W^{mg} = -\Delta U$$

$$\Delta E_k = E_{kf} - \cancel{E_{ki}}^{=0}$$

$$E_{kf} = E_k^{ROT\,1} + E_k^{ROT\,2} + E_k^{TR\,m}$$

b) $F_m = 1{,}5\ N$

$m_0 = 10^{-2}\ kg$



deve esistere una forza centripeta

$$F_c = m_0 a_c = m_0 \omega^2 R_2$$

$$\begin{cases} F_c < F_m & \text{sta attaccato} \\ F_c > F_m & \text{si stacca} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{a}{R_1}$$

calcolo $F_c(t = t_0)$

$$F_c(t=t_0) = m_0\, \omega(t_0)^2 R_2 = m_0\, \omega(t_0)^2 R_2 = 4,88\ N > 1,5\ N = F_m$$

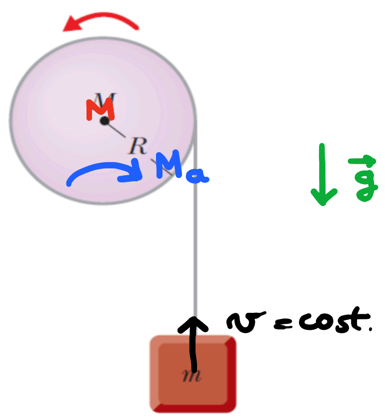
$$\omega(t=t_0) = \overset{=0}{\cancel{\omega_0}} + \alpha t_0 = \frac{a\, t_0}{R_1}$$

quando si stacca ? $\Rightarrow$ il magnetino si è già staccato

$t^* < t_0$

$$F_c(t=t^*) = F_m \rightsquigarrow t_* = \dots$$

6.10 Un disco di raggio R = 0.25 m giace in un piano verticale e può ruotare attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro e ortogonale al disco stesso. Sul bordo del disco è avvolto un filo che sostiene un corpo di massa m = 15 kg. Si applica all'asse del disco un momento costante M = 40 N m e si osserva che il corpo m sale con velocità costante. Calcolare: a) il modulo del momento di attrito costante agente sull'asse del disco, b) per un giro completo il lavoro del momento di attrito, il lavoro della forza peso. c) Commentare il risultato.



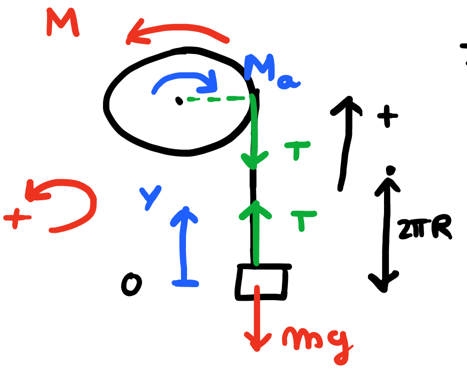
$R = 0,25\ m$

$m = 15\ kg$

$M = 40\ Nm$

$\boxed{\text{m sale con velocità cost.}}$

$M_a = ?$



II^a legge Newton su m :

- $T - mg = ma = 0$ ← $v = cost.$ $\Rightarrow a = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{T = mg}$$

- $\sum M^{(E)} = I\alpha$ per il cilindro $a = \alpha R \Rightarrow \alpha = 0$

$$\sum M^{(E)} = 0$$

$$M - M_a - TR = 0$$

$$\Rightarrow M_a = M - TR = M - mgR = 3,21\ Nm$$

- per un giro completo W^{M_a}, W^{PESO}

$$W^{M_a} = -M_a \Delta\theta = -M_a 2\pi = -20,2\ J$$

$$W^{M} = M \Delta\theta = M 2\pi = 251,3\ J$$

$$W^{mg} = -\Delta U = -(mgh_f - mgh_i) = -(mg\,2\pi R - 0)$$

$$= -231{,}1 \text{ J}$$

$$\Delta E_K = W^{TOT} = W^M + W^{M_a} + W^{mg} = 0$$ ✓

$E_{Kf} = E_{Ki}$