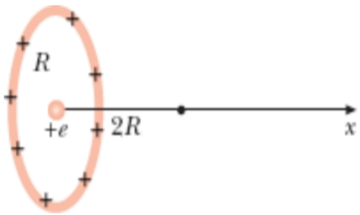
Tutorato 11 (canale 2)

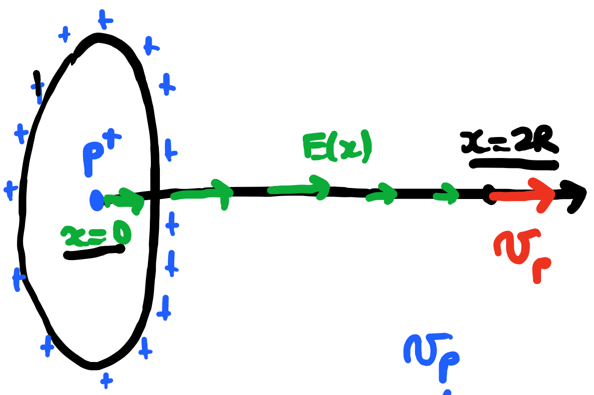
2.16 Nel centro O di un anello di materiale isolante di raggio $R = 10$ cm, uniformemente carico con carica $q = 2.5 \cdot 10^{-8}$ C, è posto un protone. Si sposta di molto poco il protone dalla posizione O che è di equilibrio instabile. Calcolare la velocità v_p raggiunta dal protone ad una distanza $x = 2R$ dal centro dell'anello.



$R = 10$ cm

$q_A = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ C

$\lambda = \dfrac{q}{2\pi R}$



$$\vec{E}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

$$F(x) = q\,E(x)$$

BILANCIO DI ENERGIA

$$\Delta E_m = W^{NC} = 0$$

$$\Delta E_K + \Delta U_e = 0 \rightsquigarrow \overset{v_p}{E_{kf}} - \overset{=0}{\cancel{E_{ki}}} = -\Delta U_e = -q\,\Delta V$$

tra $x=0$, $x=2R$

$$U = qV$$

$$V_B - V_A := -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\Delta V = -\int_{x=0}^{x=2R} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{x=0}^{x=2R} E(x)\,dx = -\int_0^{2R} \frac{\overset{q_A}{q}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{2R} \underbrace{2x}_{f'(x)}\big(\underbrace{R^2+x^2}_{f(x)}\big)^{\overset{\alpha}{-3/2}}\,dx$$

$$\int \boxed{f'(x)}\,[f(x)]^{\alpha}\,dx$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\left(R^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}\right]_0^{2R}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{d+1}\left[f(x)\right]^{d+1}+c$$

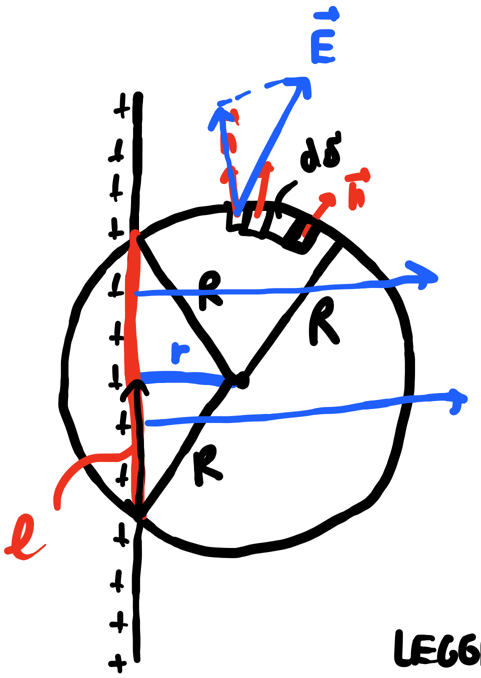
$$= +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\cancel{2}}(+\cancel{2})\left[\left(R^2+x^2\right)^{-1/2}\right]_0^{2R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+4R^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2}}\right)$$

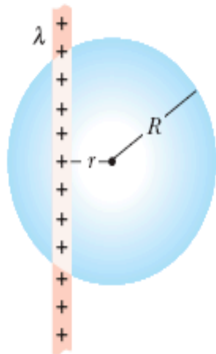
$$= \frac{-q_A}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$E_{K,f} = -q_p\Delta V \Rightarrow \frac{1}{2}m_p v_p^2 = -q_p\left[\frac{-q_A}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow v_p = \left[\frac{2}{m_p}\,\frac{q_p q_A}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]^{1/2} = 4{,}88\cdot 10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

3.12 Un filo indefinito è carico con densità lineare costante $\lambda = 8.86\cdot 10^{-8}$ C/m. Una sfera di raggio $R = 10$ cm interseca il filo ad una distanza r d centro. Calcolare: a) il flusso del campo elettrostatico Φ (**E**) attraverso la superficie sferica in funzione di r e b) il flusso quando il filo non interse sfera.





$\lambda = 8{,}86\cdot 10^{-8}$ C/m

$R = 10$ cm

$\Phi_E(r) = ?$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$$

LEGGE DI GAUSS

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

/ se $r > R$

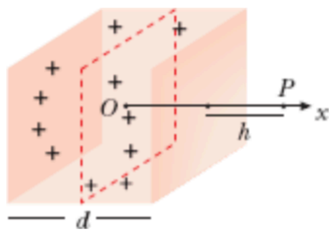
$$q_{int}(r) = \lambda\, \ell(r) = \lambda\, 2\sqrt{R^2-r^2}$$

$\ell/2$

Filo non interseca la sfera
$\Rightarrow q_{int} = 0$
$\Phi(\vec{E}) = 0$

$$\Phi_E(r) = \frac{q_{int}(r)}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} 2\sqrt{R^2-r^2} \qquad \boxed{r \leq R}$$

3.14 Una carica $q = 1.5 \cdot 10_{-8}$ C si trova in O, nel piano mediano di una carica distribuita uniformemente con densità $= 10^{-8}$ C/m^3 tra due piani paralleli indefiniti distanti $d = 2$ cm. Calcolare: a) il campo elettrostatico $\mathbf{E}(x)$ dovuto alla carica distribuita e b) il lavoro W fatto dalle forze elettrostatiche per trasportare q in un punto P, situato all'esterno della regione carica e distante $h = 3$ cm dal piano più vicino.

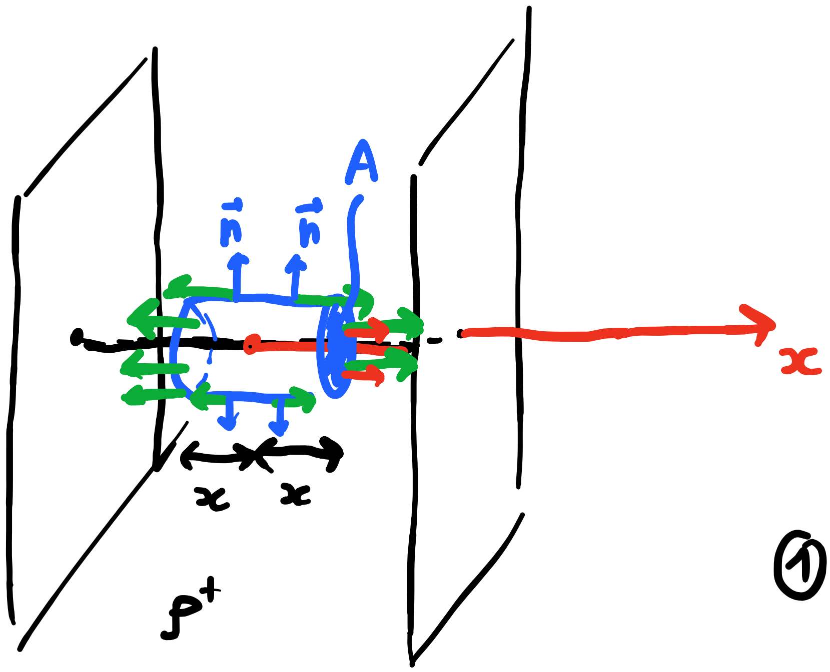


$q = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ C

$\rho = 10^{-8}$ C/m^3

$d = 2$ cm

$E(x) = ?$



STRATEGIA:

1) $\Phi(\vec{E})$ con GAUSS

2) $\Phi(\vec{E})$ definizione

3) $\Phi(\vec{E})_G = \Phi(\vec{E})_D$

① $\Phi(\vec{E}) = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho V_{int}}{\varepsilon_0} = \boxed{\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} 2xA}$

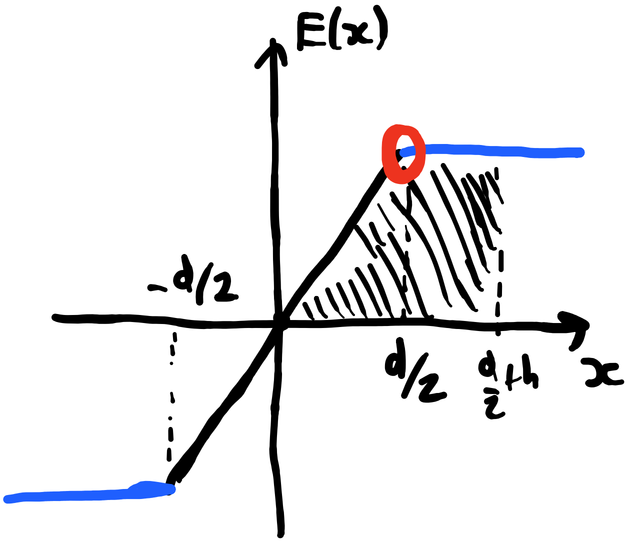
② $\Phi(\vec{E}) = \displaystyle\int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS =$

$\perp \vec{x}$ $=0$

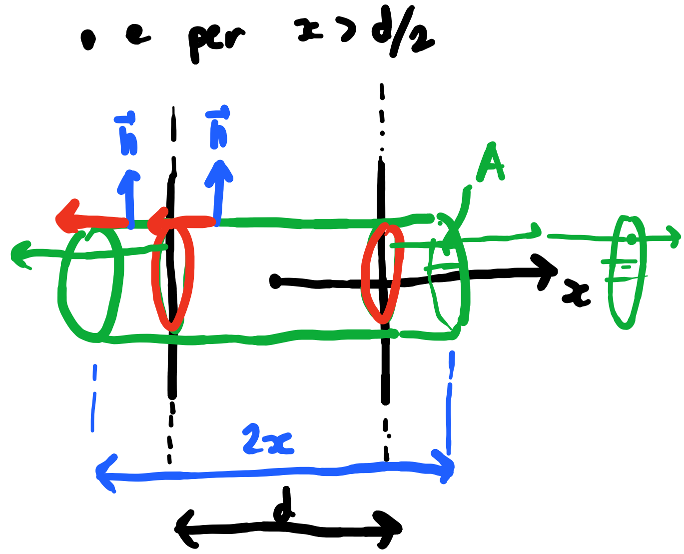
$$= \int_{A_{b1}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS + \int_{A_{b2}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS + \cancel{\int_{S_\ell} \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS}$$

$$= 2\int_{A_b} \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = 2\int_{A_b} E(x)\, dS = \boxed{2E(x)\,A}$$

(3) $\frac{\rho}{\varepsilon_0} \cancel{2} x \cancel{A} = \cancel{2} E(x) \cancel{A} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$ quando $x \leq \frac{d}{2}$



• e per $x > d/2$



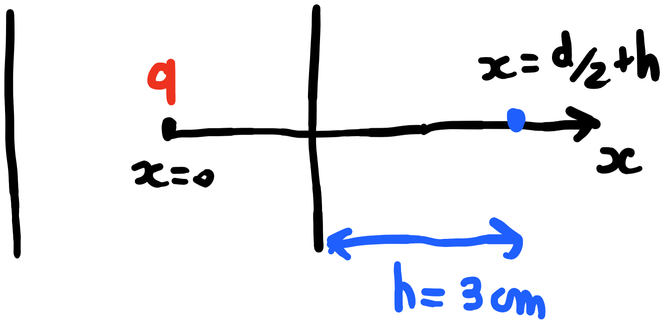
$$\phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{dA\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(E) = 2E(x)A$$

$$\rightsquigarrow \frac{d\cancel{A}\rho}{\varepsilon_0} = 2E(x)\cancel{A}$$

$$E(x) = \frac{d\rho}{2\varepsilon_0} = \boxed{\text{cost.}}$$

non dipende da x.



$$F_e = qE(x)$$
$$\uparrow$$
$$F_e(x)$$

$$W^e = -\Delta U_e = -q\Delta V = -q\left[V\left(x=\frac{d}{2}+h\right) - V(x=0)\right] =$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

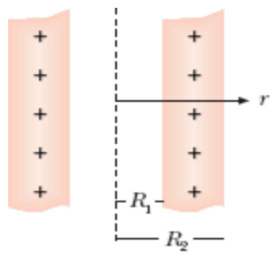
$$= q\int_{x=0}^{x=d/2+h} E(x)\,dx =$$

$$= q\left[\int_0^{d/2} E(x)\,dx + \int_{d/2}^{d/2+h} E(x)\,dx\right] =$$

$$= q\left[\int_0^{d/2} \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\,dx + \int_{d/2}^{d/2+h} \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\,dx\right] =$$

$$= q\left[\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}\Big|_0^{d/2} + \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}h\right] = q\left[\rho\frac{d^2}{8\varepsilon_0} + \rho\frac{dh}{2\varepsilon_0}\right] = 6{,}33\cdot 10^{-20}\ J$$

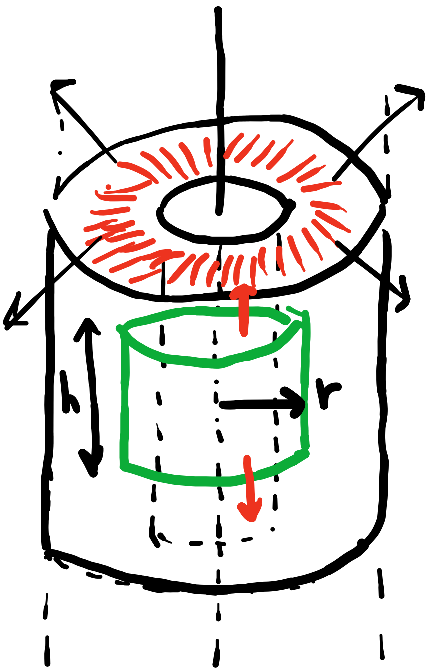
3.19 Tra due superfici cilindriche indefinite coassiali, di raggi $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm, è distribuita una carica con densità costante $\varrho = 17.72 \cdot 10^{-8}$ C/m^3. Determinare l'espressione del campo elettrostatico $E(r)$ in funzione della distanza r dall'asse del sistema.

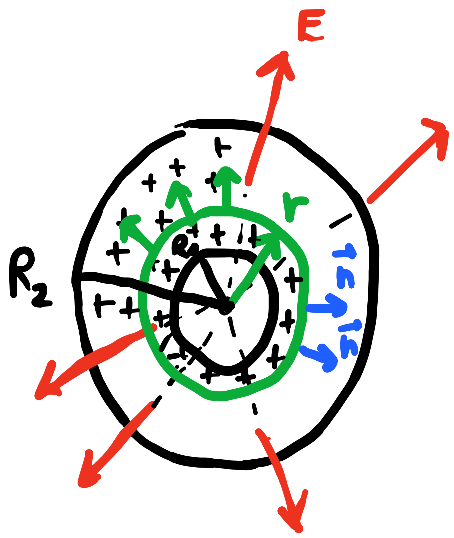


$R_1 = 10$ cm

$R_2 = 20$ cm

$\rho = 17{,}72 \cdot 10^{-8}$ C/m^3





se $\boxed{r < R_1}$

$\phi(\vec{E}) = 0$

$\phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$

$= \int_{S_\ell} E(r)\, dS + \cancel{\int_{A_{1+2}} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS}^{=0}$

perché $\vec{n} \perp \vec{E}$ alle aree di base

$= \int_{S_\ell} E(r)\, dS = E(r)\, S_\ell$

$0 = E(r)\, S_\ell \Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$ quando $r < R_1$

$r \in [R_1, R_2]$

$$\phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho h \pi (r^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(\vec{E}) = \int_{S_\ell} E(r)\, dS = E(r)\, S_\ell = E(r)\, 2\pi r h$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho\,(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} \qquad \text{quando} \qquad r \in [R_1, R_2]$$

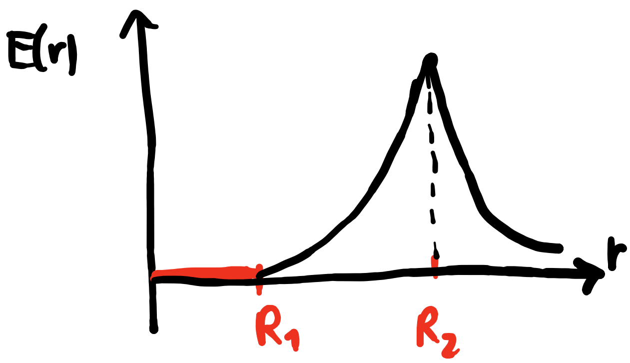
• $r > R_2$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho h \pi (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0} = \text{cost.}$$

$$\Phi(\vec{E}) = E(r)\, S_\ell = E(r)\, 2\pi r h$$

$$E(r) = \frac{\rho\,(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

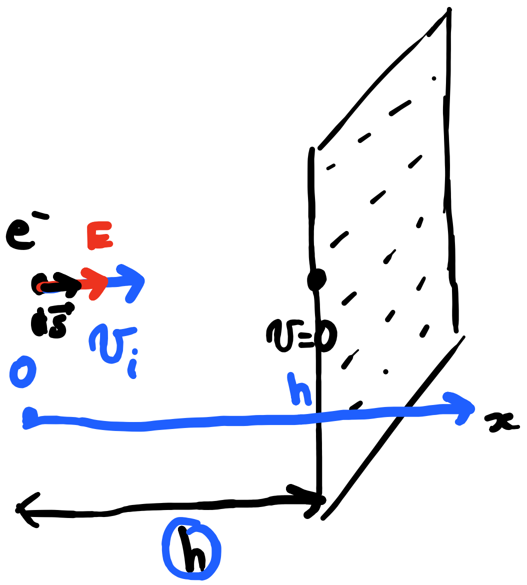
quando $r > R_2$



4.12 Un elettrone di energia cinetica $E_e = 100$ eV è lanciato verso una lastra metallica indefinita, carica con una densità di carica uniforme $\sigma = -1.776 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. Calcolare: a) da quale distanza h dalla lastra deve essere lanciato l'elettrone per raggiungere la lastra con velocità nulla e b) a quale distanza h' dalla lastra arriva un protone lanciato dalla superficie della lastra, con energia cinetica $E_p = 100$ eV.

$E_k = 100$ eV

$\sigma = -1{,}776 \cdot 10^{-6} \ \frac{C}{m^2}$



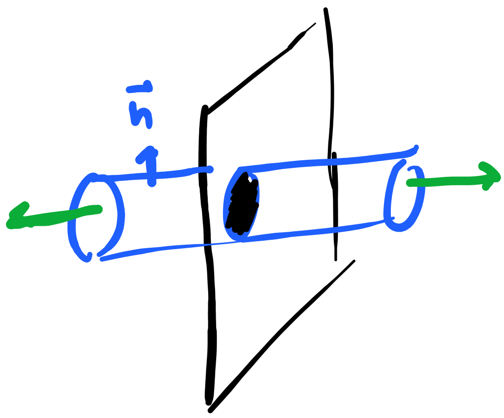
h tale che $v_f = 0$

BILANCIO DI ENERGIA

$x=0, \quad x=h$

$$\Delta E_k = W^{TOT} = \cancel{W^{NC}} + W^{C} = -\Delta U_e$$

$$\underbrace{\cancel{E_{kf}}}_{=0} - E_{ki} = -q\Delta V$$



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

campo elettrostatico generato da una piastra indefinita

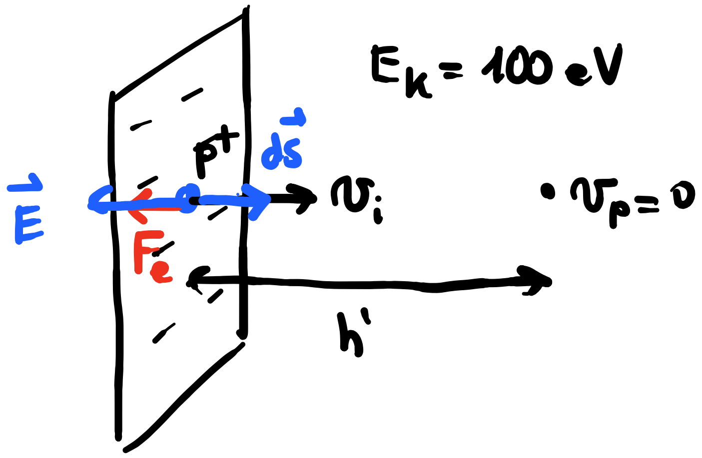
$$\Delta V = -\int_0^h \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_0^h E\,dx$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} h$$

$q = -e$

$$-E_{ki} = +\overset{-e}{q}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} h$$

$$h = \frac{E_{ki}\, 2\varepsilon_0}{\sigma e} = 9{,}97 \cdot 10^{-4} \text{ m} \qquad e = +1{,}6\cdot 10^{-19} \text{ C}$$



$E_k = 100\ eV$

$$\Delta E_k = -\Delta U = -q\Delta V$$

$$-E_{ki} = +q\int_0^{h'} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{ds}}$$

$$= -q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}h'$$

$$h' = \frac{E_{ki}\,2\varepsilon_0}{\sigma q} = 9.97\,10^{-4}\,m$$