TUTORATO +

4.10 Cinque fogli metallici, sferici di spessore trascurabile, tutti concentrici, aventi raggi pari rispettivamente a 1, 2, 3, 4 e 5 cm, sono collegati con sottili fili conduttori come in figura. Il sistema è inizialmente scarico. Una carica $q = 10^{-10}$ C è depositata sulla superficie più interna. Calcolare: a) le cariche q_1, q_2, q_3, q_4 e q_5 presenti su ciascuna superficie, b) il campo elettrostatico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro O del sistema e c) l'energia elettrostatica U_e del sistema. Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico $E(r)$ e l'energia elettrostatica U_e quando: d) la sfera 1 è posta in contatto con la sfera 2, e) la sfera 3 è posta in contatto con la sfera 4, f) la sfera 5 è collegata a terra.

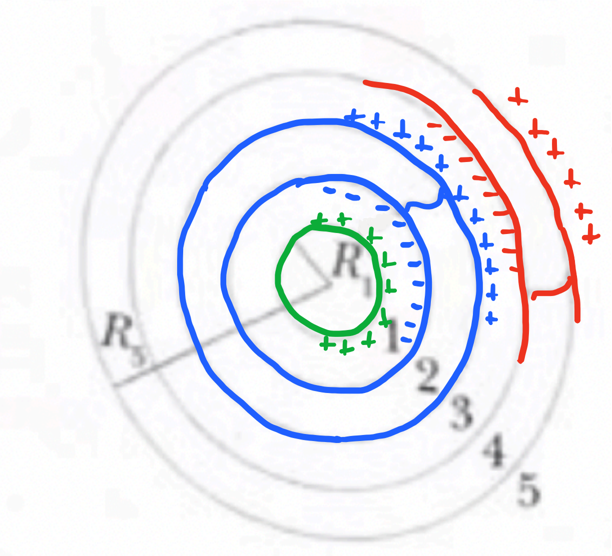
$r_i = i$ cm

ci sono dei fili conduttori come in figura.

inizialmente è scarico.

$q = 10^{-10}$ C sulla sup. 1

a) q_i presente sulle superfici



in un conduttore carico la carica si dispone sulla superficie esterna del conduttore.

$q_1 = q$

le superfici 2-3 sono praticamente un conduttore con all'interno un conduttore isolato carico

$\Rightarrow$ le cariche si dispongono come in figura

$\Rightarrow q_2 = -q$ e $q_3 = q$

allo stesso modo le superfici 4-5 $\Rightarrow q_4 = -q$ e $q_5 = q$.

b) $E(r)$

- $E(r) = 0 \quad \forall\, r < R_1$

dalle proprietà dei conduttori: $E = 0$ e $V = \text{cost.}$ all'interno

- $r \in [R_1, R_2]$ prendo una sup sferica con $r \in [R_1, R_2]$

Dal T. di Gauss $\Phi(\vec{E}) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

dalla def: $\Phi(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2$

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\vec{E}) &= \frac{q}{\varepsilon_0}\\ \Phi(\vec{E}) &= E \cdot 4\pi r^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

- $E(r) = 0 \quad r \in [R_2, R_3]$ e $r \in [R_4, R_5]$

- $E(r) = \dfrac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$ per $r \in [R_3, R_4]$ e $r > R_5$ utilizzando sempre T. di Gauss e def. di $\Phi(\vec{E})$.

c) U_e del sistema.

il sistema è somma di "tre" condensatori sferici.

Ricordiamo la capacità di un condensatore sferico:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$ ← energia elettrostatica di un condensatore

$$\Rightarrow U_{e\,sist} = U_{e12} + U_{e34} + U_{e5\infty} = \frac{1}{2} q^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_\infty}\right)$$

$\frac{1}{R_\infty} \to 0$

$$= 3{,}52 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

d) $E(r)$ e U_e se 1-2 a contatto

$E(r) = 0 \quad \forall\ r < R_3$, $r > R_3$ uguale a prima

$$U_{e\,sist} = U_{e34} + U_{e5\infty} = \frac{1}{2} q^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = 1{,}27 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

e) 3-4 a contatto

$\Rightarrow E(r) = 0 \quad \forall\ r \in [R_2, R_5]$ resto uguale a prima

$$U_{e\,sist} = U_{e12} + U_{e5\infty} = \dots = 3{,}15 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

f) 5 è collegata a terra $\Rightarrow E(r) = 0 \quad \forall\ r > R_5$

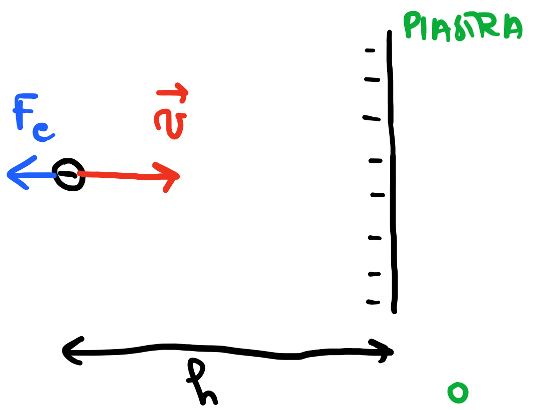
$$U_{e\,sist} = U_{e12} + U_{e34} = \dots = 2{,}62 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

4.12 Un elettrone di energia cinetica $E_e = 100$ eV è lanciato verso una lastra metallica indefinita, carica con una densità di carica uniforme $\sigma = -1.776 \cdot 10^{-6}$ C/m². Calcolare: a) da quale distanza h dalla lastra deve essere lanciato l'elettrone per raggiungere la lastra con velocità nulla e b) a quale distanza h' dalla lastra arriva un protone lanciato dalla superficie della lastra, con energia cinetica E_p = 100 eV.

$E_e = 100$ eV

$\sigma = -1{,}776 \cdot 10^{-6}$ C/m²

a) h tale che arrivi con $v=0$



elettrone e piastra hanno cariche opposte quindi sull'elettrone agisce una forza repulsiva.

bilancio di energia $\Delta E_m = 0$

$$E_{mi} = E_e + U_e = E_e + q\,\Delta V_i$$

dove $\Delta V_i = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} h$ e $q = -e$

PIASTRA PIANA indefinita (USO GAUSS e DEFINIZIONE DI $\phi(\vec{E})$)

$$E_{mf} = \overset{=0}{E_{k_f}} + q\,\overset{0}{\overset{\parallel}{\Delta V_f}}$$

$$\Rightarrow E_e = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h e \rightarrow h = -\frac{\varepsilon_0 E_e}{e\sigma} = 4{,}98 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

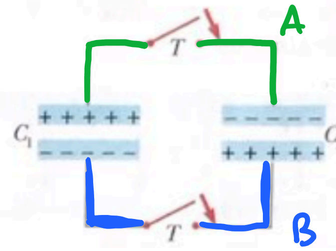
b) h' a cui arriva un p^+ lanciato con la stessa Energia cinetica e da distanza h.

$\Delta E_m = 0$ $\qquad E_{mi} = E_{ki} + 0$

$$E_{mf} = 0 + q\,\Delta V_f = e\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h'\right)$$

$$\Rightarrow E_{ki} = -e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(h') \quad \Rightarrow h' = -E_{ki}\frac{\varepsilon_0}{\sigma \cdot e} = 4{,}98 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

4.23 Due condensatori $C_1 = 120$ pF e $C_2 = 240$ pF sono caricati tramite una batteria ciascuno ad una differenza di potenziale $V = 200$ V. I due condensatori vengono collegati tra loro, l'armatura positiva dell'uno con la negativa dell'altro. Calcolare: a) la differenza di potenziale V' ai capi del sistema e b) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e.



$C_1 = 120$ pF , $C_2 = 240$ pF

$\Delta V = 200\ V_i$ iniziale

a) V' ai capi del sistema

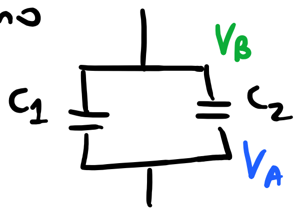
calcoliamo le cariche q inizialmente presenti su C_1 e C_2.

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

$$\Rightarrow q_1 = C_1 \Delta V_i = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\ C$$

$$q_2 = C_2 \Delta V_i = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ C$$

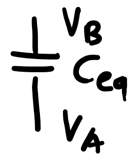
quando si chiudono gli interruttori T le cariche si equilibriano



con $q = q_2 - q_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\ C$ dalla parte "A" e $-q$ da "B".

Capacità di condensatori in // $C_{eq} = C_1 + C_2$

$$\Rightarrow V_A - V_B = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1 + C_2} = \underset{V'}{\underset{\|}{66{,}7}}\ V \equiv$$



b) $\Delta U_e = ?$

U_e di un condensatore carico : $U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

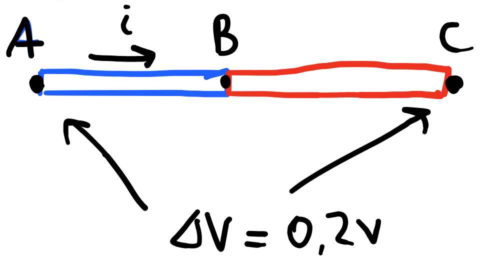
$$\Rightarrow \Delta U_e = U_{ef} - U_{ei} = \frac{1}{2} C_{eq} V'^2 - \left(\frac{1}{2} C_1 \Delta V_i^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_i^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (C_1 + C_2)(V'^2 - \Delta V_i^2) = -6{,}41 \cdot 10^{-6}\ J$$

5.3 Un resistore è composto da due fili collegati in serie: il primo di rame ($\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$) è lungo $l_1 = 5$ m e ha una sezione $\Sigma_1 = 2\ mm^2$; il secondo di alluminio ($\rho_{Al} = 2.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$) è lungo $l_2 = 2$ m e ha una sezione $\Sigma_2 = 1\ mm^2$. Ai capi del resistore è applicata una differenza di potenziale $V = 0.2$ V. Calcolare: a) la differenza di potenziale V_1 e V_2 ai capi dei due fili e b) le rispettive densità di corrente j_1 e j_2.

$$\begin{cases} \rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m \\ l_1 = 5 m \\ \Sigma_1 = 2 mm^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{Al} = 2{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m \\ l_2 = 2m \\ \Sigma_2 = 1 mm^2 \end{cases}$$



a) $V_1 = V_B - V_A = ?$ $\quad V_2 = V_C - V_B = ?$

Calcoliamo prima la resistenza R_1 e R_2 ricordando

$$R = \rho \frac{l}{\Sigma} \Rightarrow R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{\Sigma_1} = 0{,}0425\ \Omega$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{\Sigma_2} = 0{,}054\ \Omega$$

Legge di Ohm

scorre una corrente: $V = RI$

Nel nostro caso $R = R_{eq} = R_1 + R_2 = 0{,}0965\ \Omega$

RESISTENZE in SERIE

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R} = 2{,}07\ A$$

$\Rightarrow$ legge di Ohm su R_1 e R_2 $\Rightarrow$ $V_1 = R_1 I = 0{,}088\ V$
$V_2 = R_2 I = 0{,}112\ V$

b) J_1 e $J_2 = ?$

$$\boxed{I = J \cdot \Sigma} \qquad J : [A/m^2]$$

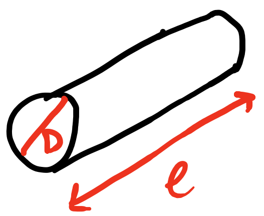
$$\Rightarrow J_1 = I/\Sigma_1 = 1{,}035\ A/mm^2$$

$$J_2 = I/\Sigma_2 = 2{,}07\ A/mm^2$$

5.8 Un filo di lunghezza $l = 5$ m e diametro $d = 2$ mm è percorso da una corrente $i = 750$ mA, quando è applicata una d.d.p. $V = 22$ V. La velocità di deriva degli elettroni è $v_d = 1.7 \cdot 10^{-5}$ ms^{-1}. Calcolare: a) la resistenza R del filo, b) la resistività ρ del materiale, c) il campo elettrico E all'interno del filo e d) il numero di elettroni di conduzione n, per unità di volume.

$\ell = 5m$
$D = 2mm$
$i = 750\,mA$
$\Delta V = 22\,V$
$v_d = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ \frac{m}{s}$

a) $R = ?$



$\Delta V = R i \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{i} = 29{,}3\ \Omega$

$\Sigma = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi$

b) RESISTIVITÀ ρ del materiale

$R = \rho \frac{\ell}{\Sigma}$ $\quad i = j\Sigma$

$\Rightarrow \rho = \frac{R\Sigma}{\ell} = \frac{R\,D^2}{\ell \cdot 4}\pi = 1{,}34 \cdot 10^{-5}\ \Omega m$

c) $|\vec{E}|$ all'interno del filo.

RICORDIAMO $\vec{E} = \rho \vec{j}$

DOVE $|\vec{j}| = \frac{i}{\Sigma} = \frac{i}{\frac{D^2\pi}{4}} = \ldots$

oppure $E = \rho j = \frac{R\Sigma}{\ell} j = \frac{R i}{\ell} = 4{,}40\ V/m$

d) n_e : numero di elettroni di conduzione per unità di volume.

$\vec{j} = n e \vec{v}_d$ $\quad$ n: n° di e^- portatori di carica per unità di volume

$\Rightarrow n = \frac{j}{e\, v_d} = \frac{i}{\Sigma e v_d} = 8{,}78 \cdot 10^{28}\ \frac{e^-}{m^3}$

e: $1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$

5.11 Un filo di nichelcromo ($\alpha = 4 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$) di una stufa dissipa una potenza $P_1 = 500$ W quando la d.d.p. applicata è $V = 200$ V e la temperatura $t_1 = 800°C$. Supponendo che esso venga mantenuto alla temperatura $t_2 = 200°C$ immergendolo in un bagno d'olio, calcolare: a) la potenza $\mathcal{P}_2$ dissipata e b) la corrente i_1 e i_2 nei due casi.

$\alpha = 4 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$ ← coeff. termico

$$\begin{cases} P_1 = 500\ W \\ \Delta V = 200\ V \\ t_1 = 800°C \end{cases}$$

$t_2 = 200°C$

a) P_2 dissipata a t_2 = ?

$$\boxed{P = Ri^2 = \frac{V^2}{R}}$$

$\xrightarrow{i}$ R

EFFETTO TERMICO SULLA RESISTIVITA'

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha \underbrace{\Delta t}_{t - 20°C}) \quad (*)$$

$$P_1 = \frac{V^2}{R_1} = \frac{V^2}{\frac{\rho \Sigma}{\ell}} = \frac{\ell V^2}{\rho_{t_1} \Sigma} \Rightarrow \boxed{\rho_{t_1} = \frac{\ell V^2}{\Sigma P_1}}$$

$(*) \Rightarrow$
$$\begin{cases} \rho_{t_1} = \rho_{20}(1 + \alpha(t_1 - 20°C)) & 1^{st} \\ \rho_{t_2} = \rho_{20}(1 + \alpha(t_2 - 20°C)) & 2^{nd} \end{cases}$$

$$\frac{2^{nd}}{1^{st}} \rightarrow \frac{\rho_{t_2}}{\rho_{t_1}} = \frac{1 + \alpha(t_2 - 20)}{1 + \alpha(t_1 - 20)} \Rightarrow \rho_{t_2} = \rho_{t_1}\left(\frac{1 + \alpha \Delta t_2}{1 + \alpha \Delta t_1}\right)$$

$$P_2 = \frac{V^2}{R_2} = \frac{V^2}{\frac{\rho_{t_2}\Sigma}{\ell}} = \frac{V^2 \ell}{\Sigma}\frac{1}{\rho_{t_1}}\left(\frac{1 + \alpha \Delta t_1}{1 + \alpha \Delta t_2}\right)$$

$$= \frac{\cancel{V^2 \ell}}{\cancel{\Sigma}} \cdot \frac{\cancel{\Sigma} P_1}{\cancel{V^2 \ell}}\left(\frac{1 + \alpha \Delta t_1}{1 + \alpha \Delta t_2}\right) = P_1 \frac{1 + \alpha(800 - 20)}{1 + \alpha(200 - 20)} =$$

$= 612$ W

b) i_1, i_2 = ?

$P = Vi \Rightarrow$

$$i_1 = \frac{P_1}{V} = 2{,}5\ A$$

$$i_2 = \frac{P_2}{V} = 3{,}06\ A$$