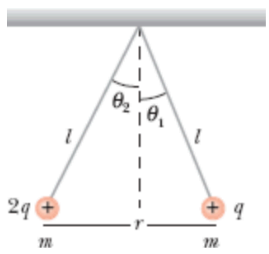
Tutorato 10 (canale 2)

1.10 Due sferette di massa $m_1 = m_2 = m = 20$ g e carica $q_1 = q$ e $q_2 = 2q$ rispettivamente, sono appese a due fili di lunghezza $l = 120$ cm, che formano all'equilibrio due angoli θ_1 e θ_2, molto piccoli, con la verticale. Calcolare: a) il rapporto θ_1/θ_2. Se la distanza tra le sferette all'equilibrio è $r = 10$ cm, calcolare: b) il valore di q.



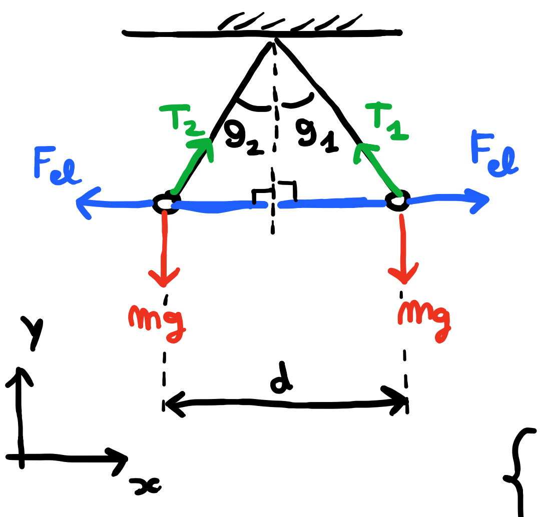
$m_1 = m_2 = m = 20$ g

$q_1 = q$

$q_2 = 2q$

$\ell = 120$ cm

a) $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = ?$



$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{d^2}$

$F_G = \gamma \frac{mM}{d^2}$

EQUIBRIO

②: $\begin{cases} x \rightarrow -F_{el} + T_2 \sin\vartheta_2 = 0 \\ y \rightarrow T_2 \cos\vartheta_2 - mg = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} T_2 \sin\vartheta_2 = F_{el} \\ T_2 \cos\vartheta_2 = mg \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\tan\vartheta_2 = \frac{F_{el}}{mg}}$

① $\begin{cases} F_{el} - T_1 \sin\vartheta_1 = 0 \\ T_1 \cos\vartheta_1 - mg = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\tan\vartheta_1 = \frac{F_{el}}{mg}}$

$\tan\vartheta_1 = \tan\vartheta_2$

$\Rightarrow \boxed{\vartheta_1 = \vartheta_2}$

b) $d = 10$ cm, $q = ?$

$d = \ell \sin\vartheta_2 + \ell \sin\vartheta_1 \underset{|}{=} 2\ell \sin\vartheta_1$

angoli piccoli

$\vartheta_1 \approx \sin\vartheta_1 \approx \tan\vartheta_1$

$$\simeq 2\ell\theta_1$$

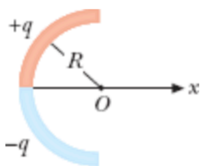
$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{d}{2\ell}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{F_{el}}{mg} = \frac{1}{mg}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q^2}{d^2} \quad\Rightarrow\quad q = \left[mg\,4\pi\varepsilon_0\frac{d^3}{4\ell}\right]^{1/2} = 6{,}74\cdot 10^{-8}\,C$$

21

$$\theta_1 = \frac{d}{2\ell}$$

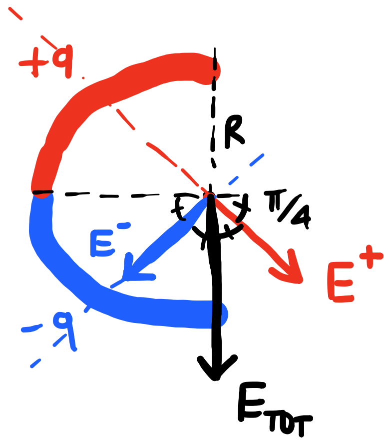
1.14 Un'asticciola di vetro è piegata a semicirconferenza di raggio $R = 10$ cm. Su una metà è distribuita uniformemente la carica $q = 5 \cdot 10^{-9}$ C e sull'altra una carica $-q$. Calcolare il campo elettrostatico **E** nel centro O.



$R = 10$ cm

$q = 5\cdot 10^{-9}$ C

$\vec{E}$ nel centro della semicirconferenza



DISTRIBUZIONE LINEARE DI CARICA $[C/m]$

$$\lambda = \frac{q}{\ell}$$

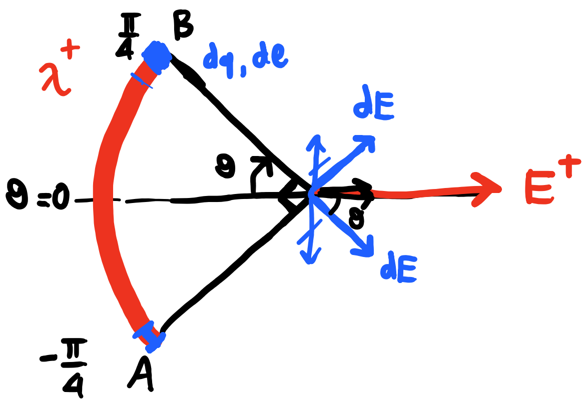
$$\lambda^+ = \frac{+q}{\frac{1}{4}2\pi R} = \frac{2q}{\pi R}$$

$$\lambda^- = \frac{-q}{\frac{1}{4}2\pi R} = \frac{-2q}{\pi R}$$

$$|E^+| = |E^-|$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME DI CARICA

- Calcolo E^+



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dq}{r^2}$$

$$E = \int_A^B dE$$

$$r = R$$

$$dq = \lambda d\ell = \lambda R d\theta$$

dalla def di radianti $\rightarrow \boxed{\ell = R\theta} \rightarrow d\ell = R d\theta$

le componenti verticali di dE si elidono tutte a due a due

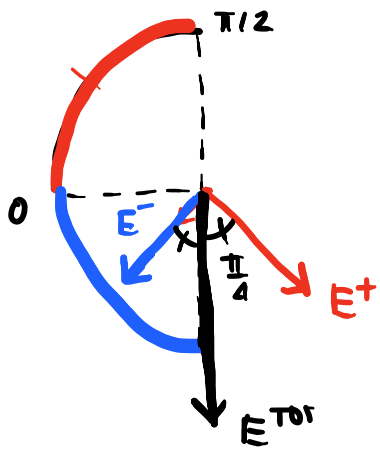
$$E^+ = \int_A^B dE = \int_A^B \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\lambda^+ \cancel{R} \cos\theta \, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\lambda^+}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda^+}{4\pi\varepsilon_0 R} \left[\sin\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\lambda^+}{R 4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\lambda^+ \sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{2q\sqrt{2}}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\lambda^+ = \frac{2q}{\pi R}$$



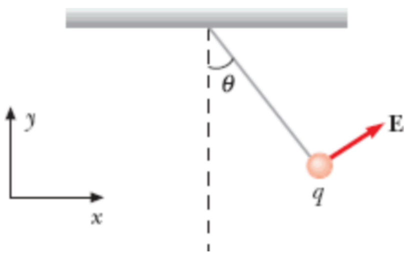
$$E^{TOT} = E^+ \cos\frac{\pi}{4} + E^- \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 2E^+ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}q\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{4}^{2}\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cancel{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2} = 5724 \ N/C$$

il verso e' verticale verso il basso

1.22 Una pallina di sughero di massa $m = 2$ g con carica $q = 5 \cdot 10^{-9}$ C è sospesa ad un filo. In presenza di un campo elettrostatico $\mathbf{E} = (5\mathbf{u}_x + 7\mathbf{u}_y) \cdot 10^5$ N/C la pallina si trova in equilibrio, quando il filo forma con la verticale un angolo θ. Calcolare: a) l'angolo θ e b) la tensione T del filo.

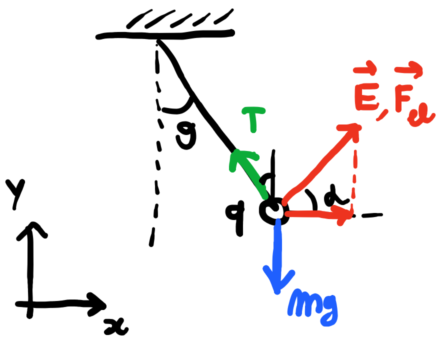


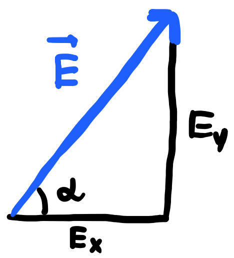
$m = 2\,g$

$q = 5 \cdot 10^{-9}\,C$

$\vec{E} = (5\hat{u}_x + 7\hat{u}_y) \cdot 10^5 \frac{N}{C}$

a) $\theta = ?$
b) $T = ?$





$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$

$E_x = 5 \cdot 10^5 \frac{N}{C}$

$E_y = 7 \cdot 10^5 \frac{N}{C}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = 54{,}46°$

$= \arctan\left(\frac{7}{5}\right)$

$F_{el,x} = qE_x$

$F_{el,y} = qE_y$

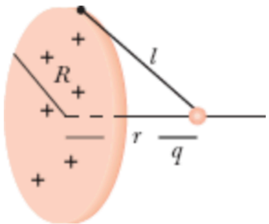
EQUILIBRIO

$$\begin{cases} -T\sin\theta + F_{el,x} = 0 \\ T\cos\theta - mg + F_{el,y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\theta = qE_x \\ T\cos\theta = mg - qE_y \end{cases} \rightsquigarrow \tan\theta = \frac{qE_x}{mg - qE_y} \rightarrow \theta = 8{,}8°$$

$$T = \frac{qE_x}{\sin\theta} = 0{,}016\ N$$

1.25 Sul bordo di un disco isolante, uniformemente carico con densità σ e di raggio $R = 10$ cm, è appeso un filo di lunghezza l, al cui estremo c'è una pallina di sughero di massa $m = 2$ g e carica $q = 4 \cdot 10^{-8}$ C. All'equilibrio la pallina si trova sull'asse x del disco e la sua distanza dal centro del disco è $r = 2$ cm. Calcolare la carica q_d del disco.



DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA

$\sigma = [C/m^2]$

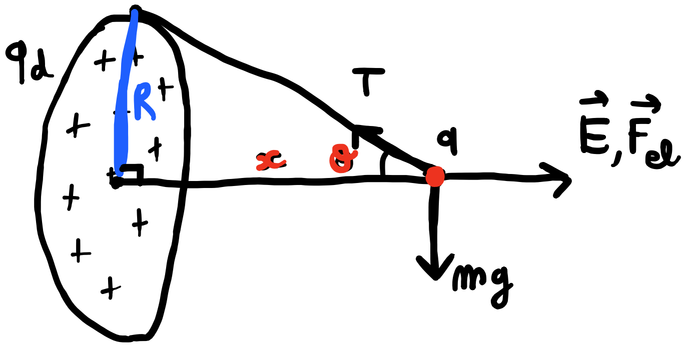
$R = 10$ cm

$m = 2$ g

$q = 4 \cdot 10^{-8}$ C

$x = 2$ cm

quanta carica è presente sul disco : $q_d = ?$



$\vec{E}$ ← campo elettrostatico generato dal disco (da q_d)

EQUILIBRIO → $\begin{cases} F_{el} - T\cos\theta = 0 \\ T\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$ ⇝ $\tan\theta = \dfrac{mg}{F_{el}}$

$\tan\theta = \dfrac{R}{x}$ ⇝ $F_{el} = \dfrac{mg}{\tan\theta} = \dfrac{mg\,x}{R} = 0{,}0039$ N

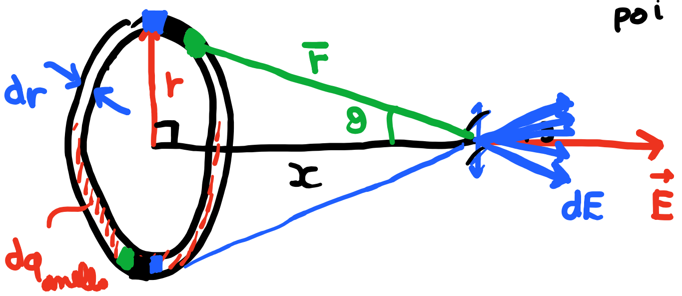
$F = qE \Rightarrow E = \dfrac{F_{el}}{q} = 9{,}75 \cdot 10^4 \ \dfrac{N}{C}$

- Calcolo E a distanza x in funzione di q_d o σ

$dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{dq_{anello}}{r^2} \cos\theta$

$\boxed{\sigma = \dfrac{q_d}{\pi R^2}}$

generico anello di raggio r



poi integro per $r \in [0,R]$

$$dq_{anello} = \sigma \cdot A_{anello} = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

$$\vartheta = \vartheta(r) \qquad \bar r = \sqrt{r^2+x^2}$$

$$E(x) = \int_{DISCO} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_{anello}}{\bar r^2}\cos\vartheta = \int_0^R \frac{1}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{(r^2+x^2)}\,\sigma\, 2\cancel{\pi} r\,dr$$

$$= \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{r}{r^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}\,dr$$

$$\bar r\cos\vartheta = x$$

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\bar r} = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, x\, \frac{1}{2}\int_0^R 2r\,(r^2+x^2)^{-3/2}\,dr =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, x\, \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}(r^2+x^2)^{-\frac{3}{2}+1}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, x\, \frac{1}{\cancel{2}}\left(-\cancel{2}\,(r^2+x^2)^{-1/2}\right)_0^R$$

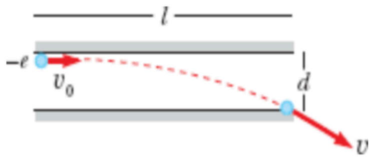
$$E(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, x\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{x}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]$$

$$\sigma = \frac{q_d}{\pi R^2}$$

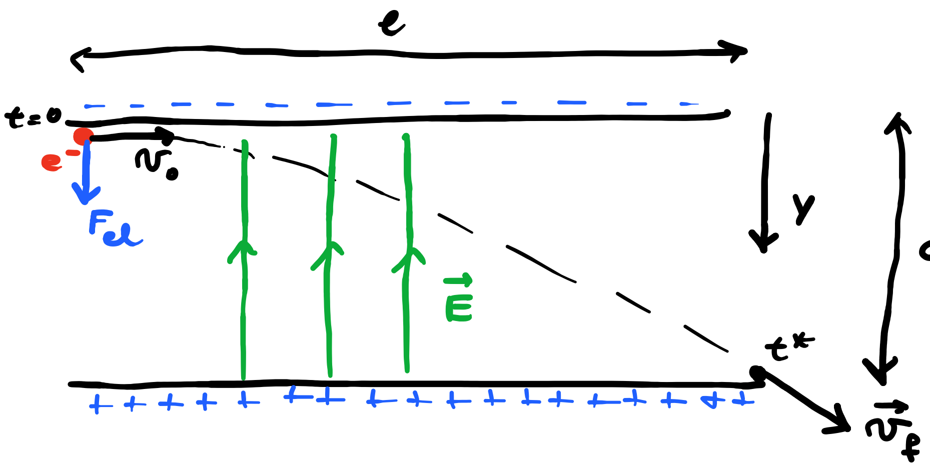
$$= \frac{q_d}{2\varepsilon_0\pi R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = \boxed{9{,}75\cdot 10^4\ \frac{N}{C}}$$

$$\rightsquigarrow\ q_d = \frac{E\cdot 2\varepsilon_0\pi R^2}{1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}} = 6{,}74\cdot 10^{-8}\ C$$

2.13 Gli elettroni di un fascio si muovono con velocità $v_0 = 10^6$ m/s. Il fascio entra nello spazio compreso tra due piani conduttori carichi, lunghi $l = 10$ cm e distanti $d = 1$ cm, passando molto vicino al piano superiore. Calcolare la differenza di potenziale V che occorre applicare tra i piani affinché all'uscita il fascio esca rasente al bordo del piano inferiore.



$v_0 = 10^6\ m/s$
$\ell = 10\ cm$
$d = 1\ cm$



x: moto uniforme

y: $F_{el} \rightarrow a_y = \text{cost.}$ moto unif. acc.

E è costante tra due piastre indefinite

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t & (x) \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 & (y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t^*) = \ell \\ y(t^*) = d \end{cases}$$

$$\ell = v_0 t^* \rightarrow t^* = \frac{\ell}{v_0} = 10^{-7}\ s$$

$$d = \frac{1}{2} a_y t^{*2} \rightarrow a_y = \frac{2d}{t^{*2}} = 2 \cdot 10^{12}\ m/s^2$$

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg$
$q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$

$$F_{el} = m_e a_y = q_e E \Rightarrow E = \frac{m_e a_y}{q_e} = 11{,}39\ V/m$$

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$|\Delta V| = Ed = 0{,}114\ V$$