TUTORATO 1 CANALE 1

1.23 Un punto materiale si muove di moto rettilineo lungo l'asse x, con una legge oraria data da $x = A + Bt^3 + Ct^4$, con $A = 5$ m, $B = 10$ m/s^3, $C = -2$ m/s^4. Calcolare: a) la velocità e la posizione del punto materiale al tempo $t = 0$, b) il tempo $t_1 > 0$ al quale si annulla la velocità, c) il corrispondente valore dell'accelerazione.

$$x = A + Bt^3 + Ct^4$$

$$A = 5\,m$$

$$B = 10\ m/s^3$$

$$C = -2\,m/s^4$$

a) $x(t=0) = A = 5\,m$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A + Bt^3 + Ct^4\right) = 3Bt^2 + 4Ct^3$$

$$v(0) = 0$$

b) t_1 : quando $v(t_1) = 0$

$$v(t) = 0 \rightarrow 3Bt^2 + 4Ct^3 = 0$$

$$t^2(2B + 4Ct) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{3B}{4C} = 3{,}75\ s = t_1 \end{array}$$

c) serve calcolare $a(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(3Bt^2 + 4Ct^3\right) = 6Bt + 12Ct^2$$

$$\Rightarrow a(t = t_1) = 6Bt_1 + 12Ct_1^2 = -112{,}5\ m/s^2$$

1.5 Un automobilista che sta viaggiando alla velocità $v_0 = 80$ Km/h vede comparire la segnalazione rossa ad un semaforo posto alla distanza $d = 100$ m. Calcolare: a) la decelerazione costante a che si deve tramite i freni impartire all'auto per potersi fermare al semaforo, b) il tempo impiegato. Se il tempo che intercorre tra il segnale rosso e quello verde è di 6 s, quando l'automobilista si trova alla distanza d, calcolare c) il valore della decelerazione costante per passare esattamente al momento dell'illuminazione del verde. Se in prossimità del semaforo c'è un vigile, l'automobilista prenderà una multa per aver superato il limite di 50 km/h?

$v_0 = 80$ Km/h

$d = 100$ m

a) acc in modo da fermarsi al semaforo

Velocità in funzione di x : $v(x)^2 = v_0^2 + 2ax$

vogliamo che $v(x=d) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_0^2 + 2ad \;\rightarrow\; a = -\frac{v_0^2}{2d} = -2{,}4691 \ \frac{m}{s^2}$$

$$v_0 = 80 \ \frac{Km}{h} = 80 \cdot \frac{1000 \ m}{3600 \ s} = \frac{80}{3.6} \ m/s$$

b) il tempo impiegato. Usiamo v in funzione del tempo: $v(t) = v_0 + at$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{v(t=t^*)}} = v_0 + a t^*$$

t^* istante in cui si ferma

$$\Rightarrow \quad t^* = -\frac{v_0}{a} = 9{,}00 \ s$$

c) sapendo che il rosso dura $\Delta t = 6$ s. Qual è la decelerazione ideale affinché si deceleri il meno possibile ($a = cost.$)

$\Rightarrow$ imponiamo $t^* = 6\ s$

$$x(t = t^*) = v_0 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2}$$

$$\| $$

$$d \Rightarrow a = \frac{2}{t^{*2}}\left(d - v_0 t^*\right) = -1{,}8519\ \frac{m}{s^2}$$

viene multato se il limite è 50 km/h al semaforo?

$$v(t^*) = v_0 + a t^* = 11{,}11\ m/s = 40{,}0\ km/h$$

1.27 In un moto armonico semplice, con pulsazione $\omega = 1.55$ rad/s e ampiezza $A = 7$ cm, si osserva che al tempo $t = 0$ $x(0) = 2.72$ cm. Calcolare: a) la fase iniziale ϕ, b) il periodo di oscillazione T, c) la velocità al tempo iniziale.

$\omega = 1{,}55$ rad/s

$A = 7$ cm

$x(t=0) = 2{,}72$ cm

a) moto armonico $\quad x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow x(t=0) = A \sin(\phi)$

$$\sin(\phi) = \frac{x(0)}{A} \rightarrow \quad \phi = \arcsin\left(\frac{x(0)}{A}\right) = 0{,}3991 \text{ rad}$$

b) $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}55 \text{ rad/s}} = 4{,}054 \text{ s}$$

c) $v(t=0) = \ ?$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \sin(\omega t + \phi)\right) = A \cos(\omega t + \phi)\, \omega$$

$$\Rightarrow v(t=0) = A \cos(\phi)\, \omega = 10{,}0 \text{ cm/s}$$

1.30 Un punto descrive un moto armonico semplice con centro nell'origine, il periodo è $T = 0.628$ s. Per $t = 0$ la posizione del punto è $x_0 = 0.15$ m e la velocità $v_0 = 2$ m/s. Scrivere le espressioni numeriche di $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $v(x)$.

$T = 0{,}628\ s$

$x(t=0) = 0{,}15\ m$

$v(t=0) = 2 m/s$

$x(t), v(t), a(t), v(x) = ?$

$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \rightarrow v(t) = A \cos(\omega t + \phi)\omega$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10{,}0\ rad/s$

$x(t=0) = A \sin(\phi) = x_0$

$v(t=0) = A \cos(\phi)\omega = V_0$

2 equazioni
2 incognite

dividendo la prima per la seconda

$\tan(\phi) = \frac{x_0 \omega}{V_0} \rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega}{V_0}\right) = 0{,}6435\ rad$

$\Rightarrow A = \frac{x_0}{\sin\phi} = 0{,}25\ m$

abbiamo quindi trovato l'espressione di $x(t)$ e $v(t)$

$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = -A \sin(\omega t + \phi)\omega^2$ (tutti i termini sono noti)

Manca da trovare $v(x)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v(t)$$

$$\Rightarrow a\,dx = v\,dv$$ ora integriamo

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$[v(x)]^2 - v_0^2 = 2\int_{x_0}^{x} a\,dx$$

Ricordiamo l'equazione del moto armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$a(x) = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow [v(x)]^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} -\omega^2 x = v_0^2 - \omega^2 [x^2]_{x_0}^{x}$$

$$= v_0^2 - \omega^2(x^2 - x_0^2)$$

$$\Rightarrow v(x) = \pm \left(v_0^2 - \omega^2(x^2 - x_0^2)\right)^{1/2}$$

$$= \pm \left(\omega^2(A^2 - x^2)\right)^{1/2}$$

infatti $\quad v_0^2 + \omega^2 x_0^2 = A^2 \cos^2(\phi)\omega^2 + \omega^2 \sin^2(\phi)\,\omega^2$

$$= A^2\omega^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = A^2\omega^2$$

1.26 Un punto si muove di moto smorzato esponenzialmente ($\tau = 75$ s); la velocità iniziale è v_0, lo spazio percorso è $x = 1.8$ m. a) Calcolare il valore di v_0. Si supponga invece che il moto sia uniformemente decelerato. A parità di v_0 e x: b) quanto vale l'accelerazione? c) Quanto dura il moto?

$\tau = 75$ s $\qquad x_f = 1{,}8$ m $\qquad$ a) $v_0 = ?$

v_0 : vel. iniziale

Richiamo

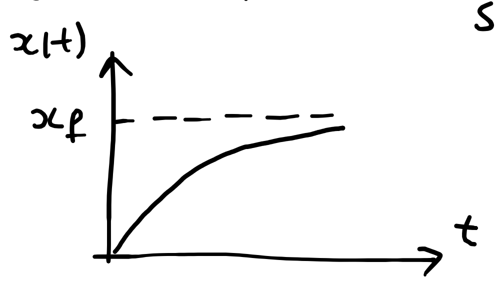
$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -k\,dt$$

integrando ... $\Rightarrow$ $v(t) = v_0 e^{-kt}$

integrando ancora $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$

$\tau = 1/k \rightarrow \quad k = 1/\tau$

$$x(t \to \infty) = 1{,}8\text{m} = \frac{v_0}{k} \quad \Rightarrow \quad v_0 = k \cdot x_f = 0{,}024 \ \frac{m}{s}$$



b) se fosse un moto unif. decellerato ?
(stessa x_f e v_0)

$$0 = v(x = x_f)^2 = v_0^2 + 2 a x_f$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{v_0^2}{2x_f} = -1{,}6 \cdot 10^{-4} \ m/s^2$$

c) $\Delta t = ?$ $0 = v(t = t^*) = v_0 + a t^*$

$\Rightarrow t^* = -v_0/a = 150\ s$