Geometria 1 - mod. A - Lezione 4

Note Title

Esercizio a) Calcolare modulo e argomento del numero $\frac{(-1-\sqrt{3}i)^6}{(-3+3i)^2}$

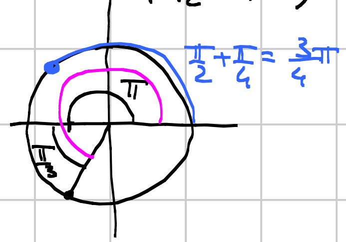
$a+ib$

$$\frac{(-1-\sqrt{3}i)^6}{(-3+3i)^2} = \frac{\left(2e^{\frac{4}{3}\pi i}\right)^6}{\left(3\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^2}$$

$$= \frac{2^{\cancel{6}\,5}}{9\cdot\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{e^{8\pi i}}\,1}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} = \frac{2^5}{9}\cdot e^{-\frac{3}{2}\pi i} = \frac{2^5}{9}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{2^5}{9}i$$

$$2e^{\frac{4}{3}\pi i} = -1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$-3+3i = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$



b) Calcolare le radici del polinomio $3x^2+x+2$

$$x_i = \frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{-23}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{6} = -\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{23}}{6}i$$

$z, \bar{z}$ sono dette coordinate hermitiane del piano di AG

$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = ..$; $z = x+iy$; $\bar{z} = ..$

c) Calcolare le soluzioni di $\bar{z}^2 + 4z + 4 = 0$

$$(x-iy)^2 + 4(x+iy) + 4 = 0$$

$$x^2 - 2xyi - y^2 + 4x + 4yi + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0 \\ \underbrace{-\cancel{2}xy + \cancel{4}^{\,2}y = 0}_{y(2-x)=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x+4=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+2)^2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \text{soluzione } z_1 = -2$$

$$\begin{cases} 4-y^2+8+4=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=16 \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm 4 \\ x=2 \end{cases} \rightsquigarrow 2 \text{ soluzioni } z_{2,3} = 2\pm 4i$$

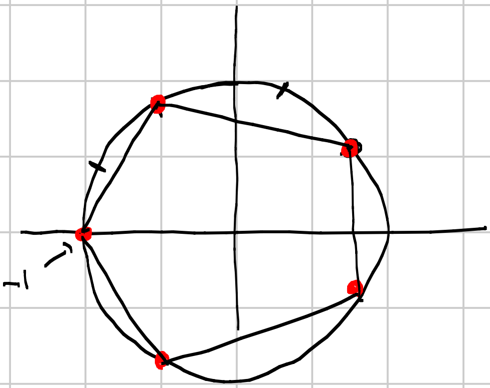
d) Calcolare le radici quinte di -1

Formula di Eulero $\boxed{e^{\pi i}+1=0}$ $\quad -1 = e^{\pi i}$

$z^5 = -1 = e^{\pi i}$ $\quad \rho = 1 \quad \theta = \pi$

$|z| = \sqrt[5]{1} = 1$

$\underbrace{\frac{\theta}{5}}_{=\frac{\pi}{5}}, \ \underbrace{\frac{\theta}{5} + \frac{2\pi}{5}}_{\frac{3}{5}\pi}, \ \underbrace{\dots}_{\frac{5}{5}\pi = \pi} \ \frac{7}{5}\pi \ , \underbrace{\frac{\theta}{5} + \frac{2\cdot 4\pi}{5}}_{\frac{9}{5}\pi},$



$z^5 + 1 = 0$
- 1 radice reale -1
- 2 coppie di radici complesse coniugate

Al variare di A e C in $\mathbb{R}$ e di α in $\mathbb{C}$, l'insieme $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid Az\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0 \}$ descrive:

- ✓ tutto il piano se $A = C = \alpha = 0$;
- ✓ l'insieme vuoto se $A = \alpha = 0$ e $C \neq 0$;
- ✓ una **retta** se $A = 0$ e $\alpha \neq 0$;
- l'insieme vuoto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC < 0$;
- un punto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 = AC$;
- una **circonferenza** di centro $-\alpha/A$ e raggio $\sqrt{|\alpha|^2 - AC}/|A|$ se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC > 0$;

$\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0 \qquad \alpha = a + ib \qquad z = x + iy$

$(a+ib)(x-iy) + (a-ib)(x+iy) + C = 0$

$ax + by + i\cancel{(bx - ay)} + ax + by + i\cancel{(ay - bx)} + C = 0$

$2ax + 2by + C = 0$ → eq. di una retta

Se $\alpha \neq 0 \quad (a,b) \neq (0,0)$

$ax + by + \frac{C}{2} = 0 \qquad \frac{C}{2} = c$

Viceversa: se $ax + by + c = 0$ è l'eq. di una retta nel piano

$\alpha = a + ib, \quad C = 2c \qquad \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0$

Esempio: $r: y = 0 \qquad a = 0 \quad b = 1 \quad c = 0 \Rightarrow \alpha = i \qquad C = 0$

$i\bar{z} + (-i)z = 0$

$z - \bar{z} = 0$

NB
- se la retta passa per l'origine $C = 0$ (e viceversa)
- Se due rette sono parallele posso scriverle come $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$

$\leadsto$ $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C_1 = 0$ hanno lo stesso α

$\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C_2 = 0$

Se $A \neq 0$ posso assumere che $A = 1$

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} \overset{+\alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha}}{} + C = 0$$

$$\left[(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha}) = z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} \right]$$

$$(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha}) - |\alpha|^2 + C = 0$$

$$|z+\alpha|^2 = |\alpha|^2 - C = r^2 \quad \leadsto \quad |z+\alpha| = r$$

$$\begin{cases} |\alpha|^2 - C < 0 & \text{no soluzioni} \\ |\alpha|^2 - C = 0 & z = -\alpha \quad \text{unica soluzione.} \\ |\alpha|^2 - C > 0 & \text{se } r := \sqrt{|\alpha|^2 - C} \quad \text{ho circonferenza di centro } -\alpha \text{ e raggio } r. \end{cases}$$

Dunque se $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0$ e $r = \sqrt{\underbrace{|\alpha|^2 - C}_{\geq 0}}$

centro della circonferenza è $\boxed{-\alpha = a + ib}$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Esempio. scrivere l'equazione in coordinate hermitiane della circonferenza unitaria.

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad a = 0 = b \qquad \alpha = 0 \qquad r = 1$$

$$\cancel{|\alpha|^2} - C = r^2 = 1 \qquad C = -1$$

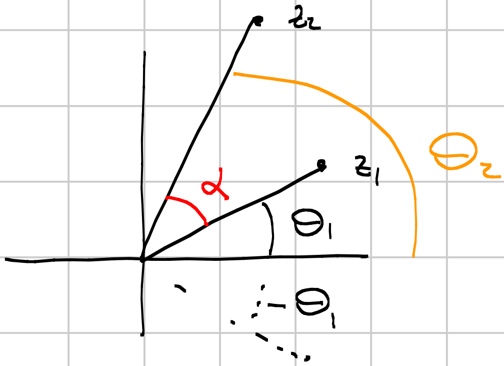
$$z\bar{z} - 1 = 0 \qquad z\bar{z} = 1 \qquad |z|^2 = 1 \quad (\text{ovvio!})$$

- scrivere circonf. di centro $2 - 3i$ e raggio 2

$$\alpha = -(2 - 3i) \qquad \underset{13}{|\alpha|^2} - C = 4 \qquad + C = +9$$

$$z\bar{z} - (2-3i)\bar{z} - (2+3i)z + 9 = 0 \qquad |z - 2 + 3i|^2 = 4$$

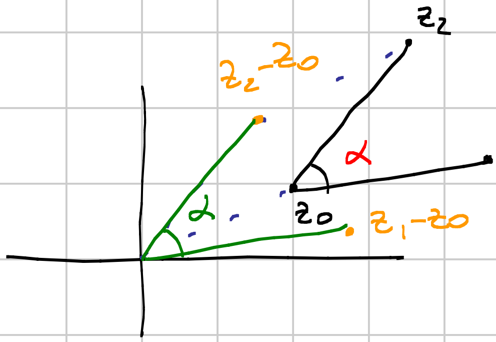
$(x-2)^2+(y+3)^2=4$



$z_1=\rho_1 e^{i\theta_1}$, $\rho_2 e^{i\theta_2}=z_2$

$$\alpha=\theta_2-\theta_1=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}(z_2\cdot\bar z_1)$$

$$\boxed{e^{i\alpha}=\frac{z_2}{|z_2|}\cdot\frac{\bar z_1}{|z_1|}}$$ importante



$$\boxed{e^{i\alpha}=\frac{z_2-z_0}{|z_2-z_0|}\cdot\frac{\bar z_1-\bar z_0}{|z_1-z_0|}}$$

$$e^{2i\alpha}=\frac{(z_2-z_0)^2}{|z_2-z_0|^2}\cdot\frac{(\bar z_1-\bar z_0)^2}{|z_1-z_0|^2}$$

$$e^{2i\alpha}=\frac{(z_2-z_0)^{\cancel{2}}}{\cancel{(z_2-z_0)}\cdot(\bar z_2-\bar z_0)}\cdot\frac{(\bar z_1-\bar z_0)^{\cancel{2}}}{(z_1-z_0)\cancel{(\bar z_1-\bar z_0)}}=\boxed{\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\cdot\frac{\bar z_1-\bar z_0}{\bar z_2-\bar z_0}=e^{2i\alpha}}$$

NB $\cos\alpha=\mathrm{Re}\,e^{i\alpha}=\mathrm{Re}\left(\frac{(z_2-z_0)}{|z_2-z_0|}\cdot\frac{\bar z_1-\bar z_0}{|z_1-z_0|}\right)$

§ allineamento di 3 punti.

Suppongo di avere 3 punti distinti $z_0, z_1, z_2\in\mathbb{C}$

Sono allineati $\iff \alpha=0$ o π $\iff e^{2i\alpha}=1$

$$\iff \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{\bar z_2-\bar z_0}{\bar z_1-\bar z_0}$$

$$\iff (z_2-z_0)(\bar z_1-\bar z_0)-(z_1-z_0)(\bar z_2-\bar z_0)=0$$

$$\left(\iff \begin{vmatrix} z_2-z_0 & \bar z_2-\bar z_0\\ z_1-z_0 & \bar z_1-\bar z_0\end{vmatrix}=0 \quad \text{determinante di una matrice}\right)$$

NB Se ora cerco i punti z allineati con z_1, z_0

$$(z-z_0)(\bar z_1-\bar z_0)-(z_1-z_0)(\bar z-\bar z_0)=0$$

$$z(\bar z_1-\bar z_0) - \bar z(z_1-z_0) + \cancel{z_0\bar z_0} \underbrace{- z_0\bar z_1 + z_1\bar z_0}_{\in i\mathbb{R}} - \cancel{z_0\bar z_0} = 0$$

Se z_0 e z_1 appartengono alla circonf unitaria

$|z_0| = 1$ $\quad |z_1| = 1$ $\quad \bar z_0 = \frac{1}{z_0}$ e così $\bar z_1 = \frac{1}{z_1}$

$$z\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0}\right) - \bar z(z_1 - z_0) - \frac{z_0}{z_1} + \frac{z_1}{z_0} = 0$$

$$z\,\frac{\cancel{(z_0-z_1)}}{z_0z_1} - \bar z\,\overset{-1}{\cancel{(z_1-z_0)}} + \frac{-z_0^2+z_1^2}{z_0z_1} = 0$$

$$\frac{-z_0^2+z_1^2}{z_0z_1} = \frac{\overset{-1}{\cancel{(z_1-z_0)}}(z_1+z_0)}{z_0z_1}$$

$$z + z_0z_1\bar z - (z_0+z_1) = 0$$

Se P, Q stanno su circ. unitaria l'eq. della retta PQ è

$$\boxed{z + PQ\,\bar z = P + Q}$$

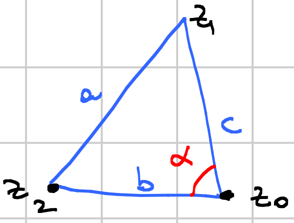
Analogamente dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distinti

$z_1 - z_0$ e $z_2 - z_0$ sono ortogonali $\iff \alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi$

$\iff 2\alpha = \pi$

$\iff e^{2\alpha i} = -1$ analogamente a prima posso trovare l'equazione dei punti z t.c. $z - z_0 \perp z_1 - z_0$ e posso renderla più semplice nel caso z_0, z_1 appartengano alla circonf unitaria. (esercizio!)

Esercizio: dimostrare il teorema di Carnot



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

usando quanto visto relativamente a $\cos\alpha$.

Sugg: $a = |z_2 - z_1|$ $\quad b = |z_2 - z_0|$ $\quad c = |z_1 - z_0|$

I numeri complessi sono un campo *algebricamente chiuso*. Vale il cosiddetto

Teorema fondamentale dell'Algebra

Sia $P(X)$ un polinomio di grado positivo in $\mathbb{C}[X]$. Allora esiste un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.

Ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ si fattorizza come prodotto di polinomi lineari $X - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e polinomi di grado due $(X - \beta)(X - \bar{\beta})$ con $\beta \in \mathbb{C}$.

Rette e cerchi nel piano di Gauss

Luogo degli zeri di funzioni nelle **variabili hermitiane** z e $\bar{z}$.

Proposizione

Al variare di A e C in $\mathbb{R}$ e di α in $\mathbb{C}$, l'insieme $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid Az\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0 \}$ descrive:

- tutto il piano se $A = C = \alpha = 0$;
- l'insieme vuoto se $A = \alpha = 0$ e $C \neq 0$;
- una **retta** se $A = 0$ e $\alpha \neq 0$;
- l'insieme vuoto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC < 0$;
- un punto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 = AC$;
- una **circonferenza** di centro $-\alpha/A$ e raggio $\sqrt{|\alpha|^2 - AC}/|A|$ se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC > 0$;

La retta di equazione $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \neq (0, 0)$ ha equazione hermitiana

$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2c = 0, \quad \text{con } \alpha = a + ib.$$

La circonferenza di equazione cartesiana

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ha equazione hermitiana

$$z\bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0,$$

con $\alpha = -(a + ib)$ e $C = |\alpha|^2 - r^2$.

Angoli

Dati due numeri complessi $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ non nulli, allora

$$\theta_2 - \theta_1 = \mathrm{Arg} \frac{z_2}{z_1} = \mathrm{Arg}(z_2 \bar{z}_1), \qquad e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{z_2}{|z_2|} \frac{\bar{z}_1}{|z_1|}.$$

Dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ l'angolo α formato da $z_2 - z_0$ e $z_1 - z_0$ è

$$\alpha = \mathrm{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}, \qquad e^{i\alpha} = \frac{z_2 - z_0}{|z_2 - z_0|} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{|z_1 - z_0|}.$$

$$NB: \quad e^{2i\alpha} = \frac{(z_2 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(z_1 - z_0)}.$$

$z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sono allineati $\Leftrightarrow \alpha = 0, \pi \Leftrightarrow e^{2i\alpha} = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{(z_2 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(z_1 - z_0)} = 1 \Leftrightarrow \frac{(z_2 - z_0)}{(z_1 - z_0)} = \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}$$

Equazione della retta per due punti z_0, z_1:

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) - \bar{z}(z_1 - z_0) + z_1\bar{z}_0 - \bar{z}_1 z_0 = 0.$$

Se $|z_0| = 1 = |z_1|$ posso riscriverla

$$z + z_0 z_1 \bar{z} = z_0 + z_1.$$

Siano $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora $z_1 - z_0$ è ortogonale a $z_2 - z_0$
$\Leftrightarrow \alpha = \pi/2, 3\pi/2 \Leftrightarrow e^{2i\alpha} = -1 \Leftrightarrow$

$$\frac{(z_2 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(z_1 - z_0)} = -1 \Leftrightarrow (z_2 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = -(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(z_1 - z_0).$$

Equazione della retta per z_0 ortogonale a $z_1 - z_0$:

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \bar{z}(z_1 - z_0) + z_1\bar{z}_0 - \bar{z}_1 z_0 = 0.$$

Se $|z_0| = 1 = |z_1|$ posso riscriverla

$$z - z_0 z_1 \bar{z} = z_0 - z_1.$$