Esercitazione 2

Esercizio 1

Le preferenze di un consumatore sui beni 1 e 2 sono rappresentate dalla funzione di utilità $U(x_1, x_2) = \frac{3}{4}\log x_1 + \frac{1}{4}\log x_2$. Il consumatore dispone di una dotazione iniziale di beni pari a $\overline{x}_1 = 4$ e $\overline{x}_2 = 4$. I prezzi dei beni sono p_1 e p_2.

a) scrivere il vincolo di bilancio del consumatore e rappresentarlo graficamente per $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}, 1, 2$.

b) calcolare la domanda di bene 1 e 2

c) per quali valori del prezzo relativo del bene 1, $\frac{p_1}{p_2}$, il consumatore è un venditore netto di bene 1?

d) considerate un particolare $\frac{p_1}{p_2}$ tale per cui il consumatore sia venditore netto di bene 1. Senza fare ulteriori calcoli, come ritenete cambino le scelte del consumatore se il prezzo relativo del bene 1 aumenta (hint: fate riferimento agli effetti di sostituzione e reddito)

e) Siano inizialmente $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$. Supponete poi che il prezzo del bene 1 aumenti fino a $p_1 = 6$. Usando il metodo di Slutsky, scomponete la variazione della domanda di bene 1 in effetto di reddito e effetto di sostituzione.

Soluzione Esercizio 1

a) il vincolo di bilancio è $p_1x_1 + p_2x_2 = 4p_1 + 4p_2$ ovvero spesa = valore della dotazione iniziale. Graficamente è una retta che passa per il punto $(4, 4)$ e ha pendenza pari a $-p_1/p_2$. Quindi sarà più inclinata per $p_1/p_2 = 2$ e meno inclinata per $p_1/p_2 = 1/2$.

b) Il SMS_{x2x1} è pari a $3\frac{x_2}{x_1}$ (notate che la funzione di utilità è il log di una Cobb-Douglas). La domanda dei beni si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ \\ p_1x_1 + p_2x_2 = 4p_1 + 4p_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x_1^* = 3\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) \\ \\ x_2^* = 1 + \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

c) il consumatore è un venditore netto di bene 1 se $x_1^* < \overline{x}_1$ ovvero se $3\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) < 4$ che implica $\frac{p_1}{p_2} > 3$.

d) se inizialmente il consumatore è un venditore netto di bene 1, un aumento del prezzo relativo del bene 1 ha due effetti sulla scelta del consumatore: per effetto di sostituzione la domanda di bene 1 diminuisce in quanto il bene 1 diventa relativamente meno conveniente rispetto al bene 2; per effetto di reddito la domanda di bene 1 aumenta perché il ricavo del consumatore ottenuto dalla vendita di bene 1 aumenta e questo spinge verso l'alto la domanda di bene 1. Complessivamente, quindi, l'effetto dell'aumento del prezzo relativo sulla domanda di bene 1 è ambiguo.

e) usando le funzioni di domanda ottenute nel punto 1.b), si ha che la domanda iniziale, per $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$, è

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{15}{4} \\ \\ x_2^1 = 5 \end{cases}$$

e la domanda finale per $p_1 = 6$ e $p_2 = 1$, è

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{7}{2} \\ \\ x_2^2 = 7 \end{cases}$$

Il reddito iniziale del consumatore è $I_1 = 4 \times 4 + 1 \times 4 = 20$.

La compensazione à la Slutsky che deve essere data al consumatore in corrispondenza dei nuovi prezzi per consentirgli gli consumare ancora il paniere $\left(\frac{15}{4}, 5\right)$, ovvero la sua scelta iniziale, è pari a $\Delta I = \Delta p_1 \times\ x_1^1 = \frac{15}{2}$. Infine, la scelta compensata del consumatore si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 6 \\ \\ 6x_1 + x_2 = [I_1 + \Delta I] = 20 + \frac{15}{2} \end{cases}$$

ed è

$$\begin{cases} x_1^C = 3,4375 \\ \\ x_2^C = 6,875 \end{cases}$$

Si ricava che l'effetto di sostituzione è

$$x_1^C - x_1^1 = -0.3125$$

e l'effetto di reddito è

$$x_1^2 - x_1^C = 0.0625$$

Come si vede i due effetti sono di segno opposto e tendono a compensarsi.

Esercizio 2

L'utilità di un individuo dipende dalla sua salute e dal consumo. La salute è misurata dalla speranza di vita residua, ovvero da quanti anni l'individuo, date le sue caratteristiche e i suoi stili di vita, può attendersi di vivere ancora. Sia quindi l'utilità dell'individuo data dalla funzione $U = L^a C^{1-a}$ dove L è la speranza di vita residua, misurata in anni, e C il consumo di un bene composito. Sia il prezzo del bene composito $p_C = 10$. Per la speranza di vita, ovviamente, non c'è un mercato e non c'è quindi un prezzo di mercato. L'obiettivo di questo esercizio è determinare quanto vale per l'individuo un anno di speranza di vita in più, ovvero quanto l'individuo sarebbe disposto a spendere per un anno di vita in più.

Siano inizialmente $L = 40$ e $C = 80$.

a) A quanto consumo l'individuo è disposto è rinunciare (al massimo) per aumentare marginalmente la sua speranza di vita? Quanto vale questa rinuncia, ovvero quanto è disposto l'individuo a pagare per un aumento unitario nella speranza di vita?

b) La popolazione è composta da 10 individui identici. Supponete che il governo abbia in cantiere una nuova politica sanitaria che potrebbe portare a un aumento della speranza di vita della popolazione pari a 1,5 anni. Il suo costo è però pari 100. Per quali valori di a il beneficio della politica (ovvero il totale di quanto sarebbero disposti gli individui a pagare) supera i suoi costi?

c) Supponente che la speranza di vita residua di un individuo deceduto in un incidente stradale fosse pari a 25 anni. Questo individuo si aspettava di percepire un reddito di 100 euro all'anno per tutti gli anni di vita residui e di consumare ogni anno tutto il suo reddito. Un giudice stabilisce un risarcimento per i suoi eredi pari a 2500 euro, pari al reddito che avrebbe percepito nel resto della sua vita. Ritenete questo risarcimento congruo? (rispondere sulla base di quanto trovato nei punti a) e b))

Soluzione Esercizio 2

La disponibilità (marginale) a pagare per un bene è pari al saggio marginale di sostituzione moltiplicato per il prezzo del bene cui si rinuncia.

a) A quanto consumo di rinuncia?

Supponente di mettere L in ascissa e C in ordinata. Per mantenere costante l'utilità, si deve scambiare L con C secondo il saggio marginale di sostituzione. Sappiamo che $\frac{dC}{dL} = SMS_{CL} = \frac{U'_L}{U'_C}$ e quindi per "pagare" una variazione marginale positiva in L siamo disposti a rinunciare al massimo a $dC = \frac{U'_L}{U'_C} dL$. Poiché $SMS_{CL} = \frac{a}{1-a}\frac{C}{L}$, un aumento unitario nella speranza di vita, cioè $dL = 1$ deve essere compensato con una riduzione nel consumo pari a $dC = \frac{a}{1-a}\frac{C}{L} = 2\frac{a}{1-a}$

Il valore della rinuncia, ovvero la disponibilità massima a pagare, è $dC \times p_C = 2\frac{a}{1-a}p_C = 20\frac{a}{1-a}$

b) Dieci persone identiche sono disposte a pagare per la politica che aumenta la speranza di vita di $dL = 1.5$ un ammontare pari a $10 \times (\frac{a}{1-a}\frac{C}{L}) \times dL \times p_C)$ che fa $300\frac{a}{1-a}$.
I benefici della politica superano i costi se $300\frac{a}{1-a} > 100$ ovvero se $a > \frac{1}{4}$.

c) Per questa persona la disponibilità a pagare per un anno di vita residua è pari a $SMS_{CL} \times p_C = \frac{a}{1-a}\frac{100}{25} \times 10 = 40\frac{a}{1-a}$. Poiché muore nell'incidente, subisce una perdita di 25 anni di vita residua che "valgono" $25 \times 40\frac{a}{1-a}$. Il risarcimento stabilito dal giudice è adeguato se $2500 > 1000\frac{a}{1-a}$ ovvero se $a < \frac{5}{7}$.

Esercizio 3

Un consumatore è dotato di una funzione di utilità $U(x, y) = \min[2x, y]$ dove x e y sono le quantità di due beni i cui prezzi sono p_x e p_y. Il reddito del consumatore è I.

a) Determinare le curve di domanda dei due beni

b) Supponiamo che il governo introduca un'accisa sul bene x pari a T. Determinare l'elasticità della domanda dei due beni rispetto all'accisa e valutare se la domanda è elastica o anelastica.

c) Determinare il livello dell'accisa per cui il gettito del governo è massimizzato.

Soluzione Esercizio 3

a) Il consumatore ha una utilità a la Leontieff. I punti di angolo delle curve di indifferenza si troveranno lungo la retta $y = 2x$.

b) L'introduzione dell'accisa implica che per ogni unità del bene x, il consumatore dovrà pagare un ammontare pari a Tx. Il vincolo di bilancio quindi passerà dalla specificazione standard:

$$I = p_x \times x + p_y \times y$$

a:

$$I - (T \times x) = p_x \times x + p_y \times y$$

L'introduzione dell'accisa può essere vista come un aumento del prezzo del bene x:

$$I = (p_x + T) \times x + p_y \times y$$

L'elasticità della domanda dei due beni rispetto all'accisa può essere quindi interpretata come l'elasticità ad un aumento p_x di pari a T.

Prima dell'introduzione dell'accisa, la domanda dei due beni era rispettivamente:

$$x_1 = \frac{I}{p_x + 2p_y}$$

$$y_1 = \frac{2I}{p_x + 2p_y}$$

(dati dall'intersezione tra il vincolo di bilancio prima dell'introduzione di T e la retta $y = 2x$)
A seguito dell'introduzione di T, le domande dei due bene diventano:

$$x_2 = \frac{I}{p_x + T + 2p_y}$$

$$y_2 = \frac{2I}{p_x + T + 2p_y}$$

(attraverso l'intersezione tra il nuovo VdB e la retta $y = 2x$)

Si può calcolare l'elasticità nel seguente modo:

$$\varepsilon_{x,T} = \frac{\Delta x}{\Delta p_x} \times \frac{p_x}{x} = \frac{x_2 - x_1}{T} \times \frac{p_x}{x_1}$$

Sostituendo i valori si trova che

$$\varepsilon_{x,T} = \frac{P_x}{P_x + T + 2P_y} < 1$$

Quindi la domanda di x rispetto all'accisa è anelastica. L'elasticità di y all'introduzione dell'accisa può essere interpretata come un'elasticità incrociata

$$\varepsilon_{y,T} = \frac{\Delta y}{\Delta p_x} \times \frac{p_x}{y} = \frac{y_2 - y_1}{T} \times \frac{p_x}{y_1} = -\frac{p_x}{T(T + p_x + 2py)} < 0$$

Infatti i beni sono complementari.

c) I beni sono perfetti complementi, quindi per avere utilità $U(x, y) > 0$, il consumatore vorrà sempre consumare una quantità di $x > 0$. Il gettito del governo è pari a $xT = \frac{TI}{p_x+T+2p_y}$. La funzione non ha massimo in valori di T definiti.

Esercizio 4

Le preferenze di un consumatore sui beni x e y sono rappresentabili con la funzione di utilità $U = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$. I prezzi sono $p_x = 10$, $p_y = 10$ e il reddito è $I = 300$.

a) calcolare la scelta del consumatore.

b) supponete che il prezzo del bene x cresca a $p_x = 20$. Calcolare la nuova scelta del consumatore.

c) utilizzando il metodo di Hicks, scomporre la variazione nel consumo determinata ai punti precedenti in effetto di reddito e sostituzione.

Soluzione Esercizio 4

a) la scelta iniziale del consumatore, derivante dal sistema $SMS_{yx} = \frac{p_x}{p_y}$ e vincolo di bilancio è: $x_1 = 10$ e $y_1 = 20$

b) dopo l'aumento del prezzo, la scelta finale del consumatore è: $x_2 = 5$ e $y_2 = 20$

c) la scelta compensata deriva dal sistema $SMS_{yx} = \frac{p'_x}{p_y}$ e $U(x,y) = U(x_1, y_1)$, ovvero

$$\frac{1}{2}\frac{y}{x} = 2 \tag{1}$$

$$x^{1/3}y^{2/3} = 10^{1/3}20^{2/3} = 10 * 2^{2/3} \sim 15.87 \tag{2}$$

la cui soluzione è

$$x_c = \frac{10}{2^{2/3}} \quad e \quad y_c = \frac{40}{2^{2/3}} \tag{3}$$

L'effetto di sostituzione è $x_c - x_1$ e l'effetto di reddito è $x_2 - x_c$. Entrambi gli effetti sono negativi.

Esercizio 5

La funzione di utilità di un consumatore è $U = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Il consumatore dispone di un reddito iniziale pari a I. I prezzi dei beni sono $p_x = p_y = 1$.

a) determinare il paniere scelto dal consumatore

b) per coprire un buco di bilancio, il governo valuta l'introduzione dell'IVA sul bene x e deve deciderne l'aliquota. Indichiamo con t l'aliquota IVA. Il prezzo del bene x comprensivo di IVA sarà quindi $1 + t$. Dato t, determinare la nuova scelta del consumatore.

c) usando il metodo di Slutsky, scomporre la variazione nel consumo di bene x in effetto di reddito e di sostituzione.

d) calcolare l'elasticità dell'effetto di sostituzione rispetto all'aliquota fiscale.

Soluzione Esercizio 5

a) il SMS_{yx} è pari a $\sqrt{\frac{y}{x}}$. La scelta del consumatore che deriva dal sistema:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{p_x}{p_y} = 1 \\ x + y &= I \end{aligned}$$

è quindi

$$x^1 = y^1 = \frac{I}{2}$$

b) dopo l'introduzione dell'IVA, la nuova scelta del consumatore risolve il sistema:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{p'_x}{p_y} = 1+t \\
(1+t)x + y &= I
\end{aligned}$$

e sarà pari a:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{I}{(1+t)(2+t)} \\
y^2 &= \frac{(1+t)I}{2+t}
\end{aligned}$$

c) il vincolo di bilancio compensato che passa per la scelta iniziale del consumatore, applicando i nuovi prezzi è

$$(1+t)x + y = I + \Delta p_x x^*$$

dove $\Delta p_x x^*$ è la compensazione applicata, pari a $t\frac{I}{2}$.
La scelta compensata risolve allora il sistema:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{p'_x}{p_y} = 1+t \\
(1+t)x + y &= I + t\frac{I}{2}
\end{aligned}$$

e vale:

$$\begin{aligned}
x^C &= \frac{I(2+t)}{2(1+t)(2+t)} = \frac{I}{2(1+t)} \\
y^C &= \frac{(1+t)I}{2}
\end{aligned}$$

L'effetto di sostituzione è $\Delta x^S = x^C - x^1 = \frac{I}{2(1+t)} - \frac{I}{2} = -\frac{I}{2}\frac{t}{1+t}$. L'effetto di reddito è $\Delta x^I = x^2 - x^C = \frac{I}{(1+t)(2+t)} - \frac{I}{2(1+t)} = -\frac{I}{2}\frac{t}{(1+t)(2+t)}$.

d) l'elasticità dell'effetto di sostituzione è

$$\frac{\partial \Delta x^S}{\partial t}\frac{t}{\Delta x^S} = -\frac{I}{2}\frac{1}{(1+t)^2}\frac{2t(1+t)}{It} = -\frac{1}{1+t}.$$

Esercizio 6

Un consumatore vive due periodi. Nel primo periodo lavora e riceve un reddito I_0. Nel secondo periodo è in pensione e riceve un reddito $I_1 < I_0$. Le sue preferenze sono descritte dalla curva di utilità $U(c_0, c_1) = \sqrt{c_0} + \beta\sqrt{c_1}$ dove c_i , $i = 0, 1$ sono i consumi nei due periodi e $0 < \beta < 1$ è il parametro che misura il tasso di sconto psicologico dell'individuo, ovvero quanto egli pesa il futuro rispetto al presente nelle sue preferenze. Il tasso di interesse di mercato cui il consumatore può prendere o dare a prestito è $r > 0$.

a) dire per quali valori dei parametri il consumatore sarà un risparmiatore

b) considerate il caso benchmark $\beta = 1$. Il consumatore è paziente e per lui presente e futuro pesano allo stesso modo. Data la condizione sui redditi, è possibile che il consumatore decida di prendere a prestito?

c) supponiamo ora che il consumatore sia impaziente ($\beta < 1$). Qual è il minimo tasso di interesse che indurrà il consumatore a risparmiare?

Soluzione Esercizio 6

a) il vincolo di bilancio intertemporale è

$$(1 + r)c_0 + c_1 = (1 + r)I_0 + I_1 \tag{4}$$

Il saggio marginale di sostituzione è

$$SMS_{c_1c_0} = \frac{MU_{c_0}}{MU_{c_1}} = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{c_1}{c_0}} \tag{5}$$

La scelta del consumatore è

$$c_0 = \frac{(1 + r)I_0 + I_1}{(1 + r) + (1 + r)^2\beta^2} \quad c_1 = (1 + r)^2\beta^2 c_0 \tag{6}$$

Il consumatore sarà risparmiatore se

$$\frac{(1 + r)I_0 + I_1}{(1 + r) + (1 + r)^2\beta^2} < I_0 \tag{7}$$

ovvero se

$$\frac{I_1}{I_0} < (1 + r)^2\beta^2 \tag{8}$$

b) con $\beta = 1$ la condizione qui sopra è sempre verificata dato che $\frac{I_1}{I_0} < 1 < (1+r)^2$ e quindi il consumatore non prenderà mai a prestito.

c) se $\beta < 1$ il consumatore risparmierà se $(1+r)^2 > \frac{1}{\beta^2}\frac{I_1}{I_0}$ ovvero se $(1+r) > \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{I_1}{I_0}}$.