Compito di Microeconomia F-O TREC
Prof. Michele Moretto
27 Agosto 2015

N.B. Le spiegazioni richieste o quelle che si ritiene utile dare non devono superare le 10 righe.

A) (8 punti) Si consideri un' economia dove ci sono solo due agenti-consumatori. Le funzioni di utilità dei consumatori sono:

$$U_a = (x_a^2 y_a)^{1/2} \qquad \text{e} \qquad U_b = \sqrt{x_b y_b}$$

e la quantità totale del bene x e quella del bene y posseduta dai due consumatori è $x = 1$ e $y = 1$.

1. Supponete ora che i due consumatori decidano di spartirsi il bene x e il bene y nel seguente modo: Al cosumatore a va $(x_a, y_a) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, e al consumatore b va $(x_b, y_b) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$. L'allocazione indicata è efficiente secondo Pareto?

2. Individuate un vettore di prezzi per i beni x e y in grado di rendere l'allocazione del punto 1) l'allocazione di un mercato in concorrenza perfetta.

B) (10 punti) Sia M la ricchezza iniziale di un individuo e L la perdita in cui incorre se si verifica un evento sfavorevole la cui probabilità è data da p. Si supponga che una compagnia assicuratrice offra all'individuo un contratto il cui il premio assicurativo P sia commisurato al risarcimento R scelto dall'individuo attraverso una formula del tipo $P = cR$ dove $c \in [0, 1]$ è un parametro deciso dalla compagnia.

1. In primo luogo indicate tutti i possibili contratti disponibili (cioè le lotterie) all'individuo e calcolate il valore atteso di questi contratti (lotterie)

2. Cosa si può dire di questi contratti e del loro valore atteso, nel caso la compagnia offrisse contratti attuarialmente equi? E cosa invece se fossero attuarialmente sfavorevoli?

3. Si supponga ora che l'individuo sia avverso al rischio e che la compagnia fissi un premio attuarialmente equo. Qual è l'ammontare di risarcimento scelto dall'individuo?

4. Infine, sia $M = 250$, $L = 100$, $c = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{5}$ e la funzione di utilità dell'individuo $u(x) = \log x$. Ricavate il livello di risarcimento scelto.

C) (8 punti) Si consideri un'industria formata da due imprese simmetriche che producono un bene omogeneo. La funzione inversa di domanda di mercato è $p = 4 - Q$ e le funzioni di costo sono $c_i = 1 + q_i$ con $i = 1, 2$. Si calcolino:

1. Le quantità prodotte e i profitti delle due imprese nell'equilibrio di Cournot.

2. Le quantità prodotte e i profitti delle due imprese nel caso entrambe tengano fede ad un accordo collusivo

3. La quantità ottimale per l'impresa 1, quando l'impresa 2 produce la quantità corrispondente all'accordo di collusione

4. Descrivete che tipo di equilibrio è il caso 3).

5. Se ritenete che il caso 3) non sia un equilibrio argomentate quale dovrebbe essere l'equilibrio più probabile.

D) (6 punti) Un mercato di un bene ha una funzione inversa di domanda $p = D(q)$ con $D'(q) < 0$. In questo mercato opera un'impresa sola che vuole rendere massimo, anzichè il profitto, il **ricavo totale derivante dalle vendite**. Ovviamente l'impresa avrà come vincolo che il ricavo $R(q) = D(q)q$ sia al massimo uguale al costo totale $C(q)$.

Scrivete il problema di ottimizzazione dell'impresa

Calcolate la soluzione ottima per l'impresa, e illustrate graficamente la soluzione.

Soluzioni:

Esercizio A

1) In primo luogo è da verificare che l'allocazione sia ammissibile. Lo è in quanto $x_a + x_b = 1$ e $y_a + y_b = 1$. In secondo luogo un'allocazione è un ottimo paretiano se giace sulla curva dei contratti, dove i SMS dei due agenti sono uguali. Per semplificare prendiamo delle trasformazioni monotone delle due funzioni di utilità

$$U_a' = x_a^2 y_a \qquad \text{e} \qquad U_b' = x_b y_b$$

I SMS sono:

$$SMS_a = \frac{2y_a}{x_a} \quad \text{e} \quad SMS_b = \frac{y_b}{x_b}$$

calcolati nella distribuzione diventano

$$SMS_a = \frac{2\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{5} \quad \text{e} \quad SMS_b = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}$$

poichè sono uguali ne discende che l'allocazione proposta è Pareto ottima.

2) Banale: poichè la condizione di equalibrio di mercato di puro cambio è:

$$SMS_a = SMS_b = \frac{p_x}{p_y}$$

ogni coppia di prezzo tale per cui $\frac{p_x}{p_y} = \frac{6}{5}$ è in grado di implentare l'allocazione efficiente.

Esercizio B

1) I contratti possibili dipendono da P e R e possono essere rappresentati nel solito modo: Se indichiamo con x l'esito questo può essere:

$$\begin{aligned} x_1^c &= M - L - cR + R = M - L + (1-c)R \quad \text{con probabilità } p \\ x_2^c &= M - cR \quad \text{con probabilità } 1-p \end{aligned}$$

Al variare di R si ottengono tutte le lotterie possibili. Inoltre esite il NON contratto, cioè se l'individuo decide di non assicurarsi:

$$\begin{aligned} x_1^s &= M - L \quad \text{con probabilità } p \\ x_2^s &= M \quad \text{con probabilità } 1-p \end{aligned}$$

Il valore atteso della lotteria senza contratto

$$E(x^s) = px_1^s + (1-p)x_2^s = M - pL$$

Il valore atteso di tutte le altre lotterie è:

$$\begin{aligned} E(x^c) &= px_1^c + (1-p)x_2^c = p(M - L + (1-c)R) + (1-p)(M - cR) \\ &= M - pL + (p-c)R \\ &= E(x^s) + (p-c)R \end{aligned}$$

2) Se i contratti sono attuarilmente equi significa che la compagnia assicuratrice fissa $c = p$. Cioè il premio è uguale alla perdita attesa. Si vede subito che in questo caso:

$$E(x^c) = E(x^s)$$

Se invece fosse $c > p$ si ha che:

$$E(x^c) < E(x^s)$$

3) Se l'individuo è avverso al rischio preferisce il valore atteso della lotteria rispetto alla lotteria stessa. Ma se la compagnia offre un contratto attuarialmente equo, cioè $c = p$, le lotterie hanno tutte lo stesso valore atteso quindi l'individuo sceglierà la lotteria CERTA. Cioè la lotteria che gli da lo stesso valore quale che sia l'evento che si verifica:

$$\begin{aligned} x_1^c &= M - L + (1-c)R = x_2^c = M - L - cR \\ &\quad \text{da cui} \\ R &= L \end{aligned}$$

Si ottiene il risultato che l'individuo sceglie la copertura completa. Lo stesso risultato lo si ottiene con la massimizzazione dell'utilità attesa sotto la condizione che $c = p$ (Verificate!!!!!!)

4) Dai dati del testo, si ha la lotteria:

$$\begin{aligned} x_1^c &= 150 + \frac{3}{4}R \quad \text{con probabilità } \frac{1}{5} \\ x_2^c &= 250 - \frac{1}{4}R \quad \text{con probabilità } \frac{4}{5} \end{aligned}$$

La scelta del risarcimento avviene massimizzando l'utilità attesa:

$$E(u(R)) = \frac{1}{5} \log \left[150 + \frac{3}{4}R\right] + \frac{4}{5} \log \left[250 - \frac{1}{4}R\right]$$

La condizione del primo ordine diventa:

$$\frac{dE(u(R))}{dR} = \frac{1}{5}\frac{\frac{3}{4}}{150+\frac{3}{4}R} - \frac{4}{5}\frac{\frac{1}{4}}{250-\frac{1}{4}R} = 0$$

La soluzione è data da $R = 40$. L'individuo sceglie di assicurarsi di meno della perdita, infatti $c = \frac{1}{4} > p = \frac{1}{5}$.

Esercisio C

1) In primo luogo la quantità totale prodotta dalle due imprese non deve superare $Q = 4$. Le funzioni di profitto delle due imprese sono:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= [4 - q_1 - q_2]\, q_1 - 1 - q_1 \\ \pi_2 &= [4 - q_1 - q_2]\, q_2 - 1 - q_2 \end{aligned}$$

dalle condizioni del primo ordine le funzioni di reazione sono:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{3 - q_2}{2} \\ q_2 &= \frac{3 - q_1}{2} \end{aligned}$$

poiche le imprese sono simmetriche $q_1 = q_2 = q = 1$, da cui $p = 2$ e $\pi = 0$.

2) Nel caso di collusione le imprese massimizzano il profitto congiunto:

$$\begin{aligned} \pi_1 + \pi_2 &= [4 - q_1 - q_2]\, q_1 - 1 - q_1 + [4 - q_1 - q_2]\, q_2 - 1 - q_2 \\ &= [4 - q_1 - q_2]\, [q_1 + q_2] - 2 - [q_1 + q_2] \\ &= [4 - Q]\, [Q] - 2 - [Q] \end{aligned}$$

da cui la condizione del primo ordine risuta:

$$4 - 2Q - 1 = 0$$

si ottime: $Q = 3/2$ cioè $q_1 = q_2 = 3/4$. $p = 5/2$ e $\pi_1 = \pi_2 = 1/8$.

3) Nel caso in cui l'impresa 2 produca $q_2 = 3/4$. l'impresa 1 massimizza:

$$\pi_1 = \left[4 - q_1 - \frac{3}{4}\right] q_1 - 1 - q_1$$

la quantità ottima si ottiene mettendo 3/4 nella funzione di reazione dell'impresa 1:

$$q_1 = \frac{3 - \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{8}$$

In questo caso la quantità totale risulta $Q = \frac{3}{4} + \frac{9}{8} = \frac{15}{8}$ il prezzo $p = 4 - \frac{15}{8} = \frac{17}{8}$, il profitto della prima impresa risulta $\pi_1 = \frac{17}{64}$ e quello della seconda impresa $\pi_2 = -\frac{5}{32}$.

4) Ricorda il caso Stakelberg, ma non lo è veramente perchè l'impresa 2 non è un vero follower in quanto non decide la produzione massimizzando i sui profitti, ma la fissa pensando che l'impresa 1 continui a rispettare l'accordo di collusione.

5) Poichè l'impresa 2 sa che nel caso in cui l'impresa 1 non rispettasse l'accordo si troverebbe profitti negativi anche lei non rispetta l'accordo e l'unico equilibrio di Nash è quello di Cournot descritto in 1).

Esercizio D

In questo caso il problema per l'impresa è:

$$\max_q R(q) \qquad \text{sv } R(q) - C(q) \geq 0$$

Possiamo pensare a due possibili soluzioni:

1) La condizione di ottimo è

$$R'(q^*) = 0$$

e se sostituendo nel vincolo si scopre che

$$R(q^*) - C(q^*) > 0$$

tutto ok

2) La condizione di ottimo è

$$R'(q^*) = 0$$

e se sostituendo nel vincolo si scopre che

$$R(q^*) - C(q^*) \leq 0$$

In questo caso sia ha pure che

$$\frac{R(q^*)}{q^*} = \frac{C(q^*)}{q^*}$$

e poichè $\frac{R(q^*)}{q^*} = p$ ne dicende che il prezzo è uguale al costo medio.