Compito di Microeconomia F-O TREC + TEM
Prof. Michele Moretto
14 Luglio 2015

N.B. Le spiegazioni richieste o quelle che si ritiene utile dare non devono superare le 10 righe.

A) Sia $U = x_1^{5/3} x_2^{5/2}$ la funzione di utilita' di un consumatore ed $\mathbf{e} = (2, 3)$ il paniere delle dotazioni iniziali dei due beni.

1. Si descrivano le caratterisitche generali della funzione di utilita' e la differenza che intercorre con la funzione $V = 10 + \frac{5}{3} \ln x_1 + \frac{5}{2} \ln x_2$.
2. Si calcoli la pendenza della curva di indifferenza in un punto generico $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, e si stabilisca se e' convesso.
3. Se il prezzo relativo dei due beni è $\frac{p_1}{p_2}$ si calcoli il paniere ottimale e si dica che tipo di beni sono x_1 e x_2.
4. Per quale prezzo relativo $\frac{p_1}{p_2}$ le dotazioni iniziali sono anche il paniere di consumo domandato dal consumatore?

B) La curva del costo medio di un'impresa che opera in un mercato perfettamente concorrenziale e' data da $AC = 4x^2 - 8x + 6$. Il prezzo di mercato del bene e' $p = 6$.

1. Si determini la funzione dei proffiti dell'impresa (cioe' la funzione che lega la quantita' prodotta ai profitti dell'impresa)
2. Quali sono la quantita' ottima prodotta dall'impresa e il profitto conseguito?
3. Qual e' il prezzo minimo al quale l'impresa e' disposta ad offrire una quantita' positiva di prodotto?

C) **Repetita Iuvant.** Sia dato un duopolio dove le imprese producono un bene differenziato. Le funzioni di domanda del prodotto di ogni singola impresa è espresso dal seguente sitema:

$$q_1 = 1 - p_1 + dp_2$$

$$q_2 = 1 - p_2 + dp_1$$

dove con q_i si intende la quantita' domandata alla i-esima impresa mentre p_i e' il prezzo praticato dalla i-esima impresa. Il parametro $d < 1$ indca il grado di differenziazione dei beni. Infine si supponga che le due imprese abbiano costi operativi nulli.

1. Si calcolino le funzioni inverse di domanda
2. Se si ipotizza che le imprese competono nelle quantita' calcolare l'equilibrio di Nash.
3. Si calcolino i prezzi di equilibrio e i profitti.
4. Se ora le imprese competono nei prezzi calcolare il nuovo equilibrio di Nash.
5. Si calcolino le quantità di equilibrio e i profitti.
6. I profitti sono piu' alti nel primo caso o nel secondo?

D) Ci sono due imprese che producono lo stesso bene che viene venduto nel mercato al prezzo $p = 1$. Le due imprese hanno funzioni di costo diverse. La prima impresa ha una funzione di costo del tipo $C_1 = \frac{x^2}{2}$ dove x è la quantità che decide di produrre. La seconda impresa ha una funzione di costo del tipo $C_2 = \frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}$ dove y è la quantità che decide di produrre la seconda impresa. Come potete notare la prima impresa genera, con la sua produzione, un costo aggiuntivo alla seconda impresa, una specie di costo fisso il cui livello dipende da quanto produce la prima impresa.

1. Quali sono le quantità ottimali prodotte singolarmente dalle due imprese e i loro profitti?
2. Quali sono le quantità ottimali delle due imprese se colludessero?
3. Qual è la situazione migliore in termini Paretiani? Spiegate perchè!

Soluzioni:

Esercizio A

1) Banale

2) Potete farlo in molti modi. Per esempio si ricordi che $dV = \frac{5}{3}\frac{1}{x_1}dx_1 + \frac{5}{2}\frac{1}{x_2}dx_2 = 0 \rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2x_2}{3x_1}$. Quindi $\frac{d(\frac{dx_2}{dx_1})}{dx_1} = +\frac{2x_2}{3x_1^2} > 0$, la curve di indifferenza sono convesse.

3) Dalla 2) si ottiene anche che la condizione di ottimo $SMS = \frac{p_1}{p_2}$ risulta:

$$\frac{2x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

e che il vincolo di bilancio è

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_12 + p_23$$

Mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{aligned} 2p_2x_2 &= 3p_1x_1 \\ 4p_1 + 6p_2 - 2p_1x_1 &= 3p_1x_1 \\ 5p_1x_1 &= 4p_1 + 6p_2 \\ x_1 &= \frac{4}{5} + \frac{6}{5}\frac{p_2}{p1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{2}\frac{p_1}{p_2}x_1 \\ &= \frac{3}{2}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{4}{5} + \frac{6}{5}\frac{p_2}{p1}\right) \\ &= \frac{9}{5} + \frac{6}{5}\frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

Beni sostituti.

4) Se $\frac{p_1}{p_2} = 1$ allora il paniere delle dotazioni è anche quello ottimale.

Esercizio B

1) Si ricavi la curva dei costi totali dell'impresa:

$$CT = ACx = 4x^3 - 8x^2 + 6x$$

La funzione dei profitti è data da

$$\begin{aligned}\pi &= RT - CT \\ &= 6x - 4x^3 + 8x^2 - 6x \\ &= -4x^3 + 8x^2 \\ &= x^2(-4x + 8)\end{aligned}$$

che risulta positiva solo se l'impresa produce $x < 2$.
2) L'impresa massimizza i profitti quando:

$$\begin{aligned}\frac{d\pi}{dx} &= -12x^2 + 16x = 0 \\ &= 4x(-3x + 4) = 0\end{aligned}$$

quindi le soluzioni sono $x = 0$ (senza significato economico) e $x = \frac{4}{3} < 2$.
In questo caso il profitto risulta $\pi(x = \frac{4}{3}) = 4.7$
3) L'impresa è disposta a produrre per un prezzo superiore al punto di minimo dell curva dei costi medi. In questo punto i costi marginali risultano uguali ai costi medi, perciò:

$$\begin{aligned}MC &= 12x^2 - 16x + 6 = 4x^2 - 8x + 6 = AC \\ 8x^2 - 8x &= 0 \\ 8x(x-1) &= 0\end{aligned}$$

quindi il punto di minimo si trova in $x = 1$, da cui il prezzo $p = MC = 12(1) - 16(1) + 6 = 2$
Esercizio C
1) Invertendo il sistema si ottiene:

$$p_1 = \frac{1}{1-d}\left[1 - \frac{1}{1+d}q_1 - \frac{d}{1+d}q_2\right]$$

$$p_2 = \frac{1}{1-d}\left[1 - \frac{d}{1+d}q_1 - \frac{1}{1+d}q_2\right]$$

2) Modello di Cournot:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p_1 q_1 \\ &= \frac{1}{1-d}\left[1 - \frac{1}{1+d}q_1 - \frac{d}{1+d}q_2\right] q_1\end{aligned}$$

lo stesso per la seconda impresa. Le imprese massimizzano i profitti individuando le funzioni di reazione nelle quantità. Nel caso della prima impresa abbiamo:

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = \frac{1}{1-d}\left[1 - \frac{2}{1+d}q_1 - \frac{d}{1+d}q_2\right] = 0$$

da cui risulta che la funzione di reazione è:

$$q_1 = \frac{1+d}{2} - \frac{d}{2}q_2$$

Poichè le imprese sono simmetriche $q_1 = q_2 = q$ quindi l'equlibrio di Nash risulta:

$$q = \frac{1+d}{2+d}$$

3) Quindi i prezzi e i profitti sono:

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{1-d}\frac{1}{2+d}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1+d}{1-d}\frac{1}{(2+d)^2}$$

4) Modello di Bertrand:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1 q_1 \\ &= p_1(1 - p_1 + dp_2) \end{aligned}$$

lo stesso per la seconda impresa. Le imprese massimizzano i profitti individuando le funzioni di reazione nel prezzo. Nel caso della prima impresa abbiamo:

$$\frac{d\pi_1}{dp_1} = 1 - 2p_1 + dp_2 = 0$$

da cui risulta che la funzione di reazione è:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{d}{2}p_2$$

Poichè le imprese sono simmetriche $p_1 = p_2 = p$ quindi l'equlibrio di Nash risulta:

$$p = \frac{1}{2-d}$$

5) Quindi le quantità prodotte e i profitti sono:

$$q_1 = q_2 = q = \frac{1}{2-d}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi = \frac{1}{(2-d)^2}$$

6) Confronto i profitti:

$$\begin{aligned}
\pi^C &= \frac{1+d}{1-d}\frac{1}{(2+d)^2} \\
\pi^B &= \frac{1}{(2-d)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi^C - \pi^B &= \frac{1+d}{1-d}\frac{1}{(2+d)^2} - \frac{1}{(2-d)^2} \\
&= \frac{(1+d)(2-d)^2 - (1-d)(2+d)^2}{(1-d)(2+d)^2(2-d)^2} \\
&= \frac{(1+d)(4+d^2-4d) - (1-d)(4+d^2+4d)}{(1-d)(2+d)^2(2-d)^2} \\
&= \frac{(4+d^2-4d+4d+d^3-4d^2) - (4+d^2+4d-4d-d^3-4d^2)}{(1-d)(2+d)^2(2-d)^2} \\
&= \frac{4+d^3-3d^2-4+d^3+3d^2}{(1-d)(2+d)^2(2-d)^2} \\
&= \frac{2d^3}{(1-d)(2+d)^2(2-d)^2} > 0
\end{aligned}$$

Esercizio D

1) L'impresa 1 produce la quantità che massimizza i suoi profitti uguagliando $p = MC_1$. In questo caso la produzione ottimale della prima impresa sarà:

$$1 = x$$

quindi i profitti sono:

$$\pi_1 = px - C_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La seconda impresa decide allo stesso modo, $p = MC_2$, da cui risulta:

$$1 = \frac{y}{2}$$

quindi i profitti sono:

$$\pi_2 = py - C_2 = 2 - \frac{4}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Il profitto totale sarà

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

2) Nel caso di collusione:

$$\begin{aligned} \pi &= \pi_1 + \pi_2 = px - C_1 + py - C_2 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + y - \frac{y^2}{4} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

L'impresa massimizza π scegliendo x e y. Le condizioni del primo ordine sono:

$$\begin{aligned} 1 - x - \frac{1}{2} &= 0 \\ 1 - \frac{y}{2} &= 0 \end{aligned}$$

da cui $x = \frac{1}{2}$ e $y = 2$. Il profitto totale è:

$$\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + 2 - \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{8}$$

3) La collusione è Pareto superiore al mercato decentralizzato. Motivo: l'impresa 1 genera un' esternalità negativa (costi aggiuntivi) all'impresa 2 che nel mercato decentralizzato non vengono internalizzati (cioè l'impresa 2 non paga nulla per questo suo effetto), quindi la società intesa come la somma dei profitti delle due imprese sta peggio.