Compito di Microeconomia F-O TREC

Prof. Michele Moretto

22 Giugno 2015

N.B. Le spiegazioni richieste o quelle che si ritiene utile dare non devono superare le 3 righe.

1. Considerate un duopolio a la Bertrand dove due imprese per poter fare prezzi diversi producono un bene non perfettamente omogeneo (cioè i bene sono imperfetti sostituti). Il prezzo fissato dall'impresa 1 è P_1, il prezzo fissato dall'impresa 2 è P_2. Le due imprese hanno costi di produzione pari a c. Indicando con $p_1 = P_1 - c$, la funzione di domanda per il bene prodotto dall'impresa $i = 1, 2$ è espressa dalla seguente funzione:

$$q_i = 1 - p_i + \theta(p_j - p_i)$$

dove j indica l'impresa avversaria e θ è un parametro compreso tra $(0, \infty)$.

   (a) Dalla funzione di domanda del bene i, commentate il significato del parametro θ.

   (b) Scrivete la funzione di profitto delle due imprese

   (c) Calcolate l'equilibrio di Nash in termini di prezzi, quantità e profitti delle due imprese.

   (d) All'aumentare del parametro θ aumenta o diminuisce la competizione fra le due imprese?

   (e) Determinate l'equilibrio al tendere ti $\theta \to \infty$.

2. Un consumatore ha una funzione di utilità del tipo Cobb-Douglas $U(\alpha) = \alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2$, dove x_1 e x_2 sono rispettivamente il consumo nel primo periodo e nel secondo periodo della sua vita. Il parametro α varia nell'intervallo $[0, 1]$ e rappresenta le sue preferenze tra consumare oggi o domani. Infine il suo reddito è costante in entrambi i periodi della sua vita.

   (a) Se il tasso di interesse e costante ed uguale ad r, determinare il livello di consumo ottimo oggi e domani.

   (b) Per quali valori di α il consumatore risulta un risparmiatore e per per quali invece un creditore?

(c) Immaginate ora che ci sia un numero molto elevato di consumatori (infinito) come quello descritto sopra, ognuno con un α diverso nell'intervallo $[0, 1]$. Se consideriamo solo quelli che sono risparmiatori quanto sarà il loro risparmio totale?

3. Un individuo che ha una ricchezza iniziale pari a W_0, ha la possibilità di partecipare ad una scommessa. Se vince la scommessa guadagna la somma che ha puntato, se perde deve pagare la somma puntata. La probabilità di vincità è indicata con p e la puntata con x.

   (a) Indicate tutte le possibili lotterie a disposizione dell'individuo.

   (b) Che condizioni devono valere affinchè le lotterie abbiano una vincita attesa positiva?

   (c) Supponete ora che l'individuo si avverso al rischio e $p > 1/2$. Mostrate che la puntata dell'individuo è sempre positiva.

4. Le preferenze di un consumatore rispetto ai due beni x e y sono indicate dalla seguente funzione di utilità $U = \min(x, y)$.

   (a) Disegante le curve di indifferenza e spiegatene le caratter-sitiche.

   (b) Calcolate il Saggio Marginale di Sostituzione fra x e y di questo consumatore

   (c) Qual è il paniere ottimo, se il reddito disponibile è $R = 24$ il prezzo $p_x = 3$ e $p_y = 3$?

   (d) Come cambia il paniere ottimo se $p_y = 6$

   (e) Infine trovate un trasformazione monotona della funzione di Utilità che lasci inalterata la scelta del consumatore.

Soluzioni

Esercizio n.1

All'aumentare di θ aumenta il grado di sostituibilità dei beni prodotti dalle due imprese (Si nota infatti che la domanda aumenta all'aumentare dellla differenza dei prezzi).

La funzione di profitto è

$$\begin{aligned}\pi_1 &= P_1 q_1 - c q_1 = (P_1 - c) q_1 = p_1 q_1 = p_1[1 - p_1 + \theta(p_2 - p_1)] \\ &= p_1 - p_1^2 + \theta(p_1 p_2 - p_1^2)]\end{aligned}$$

uguale per l'altra impresa. La condizione del primo ordine per massimizzare i profitti rispetto a p_1 è:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 1 + \theta p_2 - 2(1+\theta) p_1 = 0$$

quindi la funzione di reazione è:

$$p_1 = \frac{1 + \theta p_2}{2(1+\theta)}$$

Infine poichè le imprese sono simmetriche possiamo assumere $p_1 = p_2 = p$ da cui si ricava che $q_1 = q_2 = q$

$$p = \frac{1}{(2+\theta)} \qquad \text{e } q = \frac{1+\theta}{(2+\theta)}$$

Da cui

$$\pi = pq = \frac{1+\theta}{(2+\theta)^2}$$

Se $\theta \to \infty$, otteniamo $p = 0 \to P = c$ e $\to \pi = 0$, Otteniamo il risultato standard del modello di Bertrand con imprese simmetriche.

Esercizion n.2

a) Se il reddito è costante I la sua ricchezza sarà

$$I + \frac{I}{1+r} = \frac{2+r}{1+r} I$$

Dal cui si calcola subito che consumerà la quota α della sua ricchezza nel primo periodo e $(1-\alpha)$ nel secondo periodo:

$$x_1(\alpha) = \alpha \frac{2+r}{1+r} I$$

b) Il risparmio risulta esssere:

$$s(\alpha) = I - x_1(\alpha) = I - \alpha\frac{2+r}{1+r}I = \left(1 - \alpha\frac{2+r}{1+r}\right) I$$

da cui si vede subito che se

$$\alpha < \hat{\alpha} \equiv \frac{1+r}{2+r}$$

il consumatore è un risparmiatore mentre per $\alpha > \hat{\alpha}$ risulterà un creditore.

c) Il risparmio totale sarà

$$\begin{aligned} S(r) &= \int_0^{\hat{\alpha}} s(\alpha) d\alpha = \left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{2+r}{1+r}\right) I \mid_0^{\hat{\alpha}} = \\ &= \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\frac{2+r}{1+r}\right) I \mid_0^{\hat{\alpha}} \\ &= \frac{1+r}{2+r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1+r}{2+r}\frac{2+r}{1+r}\right) I \\ &= \frac{1}{2}\frac{1+r}{2+r}I \end{aligned}$$

Soluzion n.3

a) Le lotterie possono essere descritte in questo modo $L_0 = (W_0, p = 1)$ e $L = (W_0 + x, p; W_0 - x, 1-p)$ al variare di $x \leq W_0$ sono infinite.

b) La vincita attesa è data da:

$$\begin{aligned} E(L) &= p(W_0 + x) + (1-p)(W_0 - x) \\ &= W_0 + (2p-1)x \end{aligned}$$

quindi la vincità attesa risulta positiva, cioe $E(L) > W_0$, se $p > 1/2$.

c) L'utilità attesa è data da:

$$E(U(L)) = pU(W_0 + x) + (1-p)U(W_0 - x)$$

dove U è una funzione concava qualsiasi. L'agente sceglie quanto puntare massimizzando l'utilità attesa $E(U(L))$ rispetto ad x. La FOC diventa:

$$\frac{U'(W_0 - x)}{U'(W_0 + x)} = \frac{p}{1-p}$$

Poichè $p > 1/2$ allora $\frac{p}{1-p} > 1$. Quindi la condizione è soddisfatta solo se:

$$U'(W_0 - x) > U'(W_0 + x)$$

Ragionate per assurdo: se l'individuo puntasse $x = 0$ risulterebbe $U'(W_0) > U'(W_0)$ che non è possibile e poichè l'individuo e avverso al rischio la condizione vale solo se $x > 0$.

Soluzione n.4

a) Banale...

b) SMS=∞ per $y > x$ e $SMS = 0$ per $y < x$ ed è indefinito per $x = y$.

c) Il paniere ottimale sarà dato dal sistema:

$$x = y$$
$$3x + 3y = 24$$

quindi $x = y = 4$

d) In questo caso il sistema diventa

$$x = y$$
$$3x + 6y = 24$$

quindi $x = y = 8/3$

e) Ogni trasformazione del tipo

$$U = \min(ax, by)$$

con $a = b$