ESERCITAZIONI ECONOMIA POLITICA I - 2

1. Statica comparata e domanda

1.1. **Esercizio 3.13 (Cap. 3 Katz - Rosen).** Abe consuma fucili x e burro y e la sua funzione di utilità è: $U(x, y) = x - 3/y$.

(i) Ipotizzando che $p_x = 9$ e $p_y = 16$ e I $= 900$, calcolate le quantità di x e y che assicurano ad Abe la massima utilità.

$$\mathcal{L} = x - \frac{3}{y} - \lambda(9x + 16y - 900)$$

Condizioni del primo ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - 9\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{3}{y^2} - 16\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 9x + 16y - 900$$

Dalla prima derivata otteniamo: $\lambda = 1/9$ e sostituendo nella seconda:

$$\frac{3}{y^2} - 16 \cdot \frac{1}{9} = 0 \qquad \text{allora,} \qquad y = \left(\frac{9}{16} \cdot 3\right)^{1/2} = \frac{27^{1/2}}{4} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 1,3$$

notiamo inoltre come dai calcoli fatti risulta che:

$$\frac{y^2}{3} = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{cioè} \qquad y = \left(\frac{p_x}{p_y} \cdot 3\right)^{1/2}$$

Infine, sostituendo il valore di y nel vincolo di bilancio otteniamo la quantità ottima di x:

$$9x + 16 \cdot 1,3 = 900 \qquad x = 97,7$$

(ii) Individuate le funzioni di domanda di x e di y.

La funzione di domanda per y è già stata determinata nel calcolo delle condizione del primo ordine per la lagrangiana. Quindi:

$$y = \left(\frac{p_x}{p_y} \cdot 3\right)^{1/2} \qquad \text{(funzione di domanda di } y\text{)}$$

mentre la funzione di domanda di x sarà semplicemente data da:

$$x = \frac{I}{p_x} - \frac{p_y}{p_x} y$$

sostituendo il valore di y trovato precedentemente otteniamo:

$$x = \frac{I}{p_x} - \frac{p_y}{p_x} \cdot \left(\frac{p_x}{p_y} \cdot 3\right)^{1/2} = \frac{I}{p_x} - 3^{1/2} \cdot p_y^{1/2} \cdot p_x^{-1/2}$$

(iii) Determinare l'elasticità della domanda rispetto al prezzo per x e y. Inoltre, determinare l'elasticità della domanda rispetto al reddito per x e y.

Partendo dall'elasticità della domanda di x rispetto al prezzo p_x:

$$\begin{aligned}\epsilon_{p_x} &= -\frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x} = \\ &= -\left(-\frac{I}{p_x^2} + \frac{1}{2} \cdot p_x^{-3/2} \cdot p_y^{1/2} \cdot 3^{1/2}\right) \cdot \frac{p_x}{x} \\ &= -\left(-\frac{900}{9} + \frac{4}{6} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{97,7} = 1,01\end{aligned}$$

Elasticità della domanda di y rispetto al prezzo p_y:

$$\begin{aligned}\epsilon_{p_y} &= -\frac{\partial y}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{y} = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot p_x)^{1/2} \cdot p_y^{3/2}\right) \cdot \frac{p_y}{y} = \frac{0,656}{1,3} = 0,50\end{aligned}$$

Elasticità rispetto al reddito per x:

$$\epsilon_{I,p_x} = \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{I}{x} = \frac{1}{p_x} \cdot \frac{I}{x}$$

Mentre l'elasticità della domanda di y rispetto al reddito sarà nulla.

(iv) Dimostrare che Abe non è vittima dell'illusione monetaria.

In questo caso ci basterà simulare un aumento dei prezzi e del reddito di pari misura (ad esempio moltiplicando prezzi e reddito per 2). Il paniere ottimo rimarrà invariato (la domanda è una funzione omogenea di grado zero). Abe non sarà vittima dell'illusione monetaria.

(v) La funzione di utilità di Jeff per i beni x e y è:

$$15 + 10\left(x - \frac{3}{y}\right)$$

Trovate le funzioni di domanda relative ai beni x e y di Jeff e mettetele a confronto con quelle di Abe. In che modo influisce il carattere delle funzioni di utilità sulle vostre conclusioni?

Il carattere ordinale dell'utilità ci consente di dire che le scelte ottime di Jeff saranno le stesse di Abe. Infatti, la funzione di utilità di Jeff non è altro che una trasformazione monotona di quella di Abe. Le trasformazioni monotone rispettano l'ordinamento delle preferenze. A conferma di ciò possiamo notare come il SMS sia invariato. In conclusione, calcolando le condizione del primo ordine per la lagrangiana con la funzione di utilità di Jeff noteremo che le funzioni di domanda saranno le stesse determinate per la funzione di utilità di Abe.

2. Offerta di lavoro

2.1. **Esercizio 1.** Le preferenze di un consumatore tra consumo (c) e tempo libero (L) sono rappresentate da:

$$U(c, L) = \sqrt{c} + 2\sqrt{L}$$

Quale è la scelta ottima per il consumatore dato il prezzo $p_c = 3$ e il salario $w = 6$? Si tratta di un problema di massimizzazione della funzione di utilità $U(c, L)$ vincolato al fatto che la spesa per il consumo dovrà essere pari al reddito da lavoro del consumatore. Cioè:

(i) $P_c c = w(24 - L)$ o,
(ii) $P_c c + wL = w24$ o,
(iii) $c = \frac{w}{p_c}(24 - L)$

dove il rapporto w/p_c rappresenta il salario reale (prezzo relativo tra tempo libero e consumo).
La condizione di ottimo sarà data da:

$$SMS = \frac{w}{p_c}$$

con,

$$SMS = \frac{\partial U/\partial L}{\partial U/\partial c} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{L}}$$

e quindi la condizione di ottimo che troveremo sarà:

$$\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{L}} = \frac{6}{3} \qquad \text{cioè} \qquad c = L$$

Sostituendo nel vincolo:

$$3c = 6(24 - c) \qquad \text{allora,} \qquad c = 16$$

quindi il tempo libero sarà pari a 16 ore e l'offerta di lavoro pari a 8.

Come si modifica la scelta del consumatore se egli può disporre anche di un reddito non da lavoro paria a 9?

Il vincolo di bilancio dovrà tener conto di questo ulteriore reddito e quindi:

$$3c = 6(24 - L) + 9$$

mentre la condizione di tangenza tra inclinazione della curva di indifferenza (SMS) e inclinazione del vincolo di bilancio (rapporto tra w e p_c) rimarrà invariata. Quindi sostituiremo la condizione trovata precedentemente nel nuovo vincolo di bilancio:

$$c = L$$
$$3c = 6(24 - c) + 9$$

da cui otterremo: $c = 17$, $L = 17$ e un'offerta di lavoro pari a 7 ore.

Con l'introduzione di un reddito non da lavoro possiamo notare un effetto di puro reddito nelle nuove scelte del consumatore. Inoltre entrambe i bene si comportano come *beni normali*.

2.2. **Esercizio 2.** Le preferenze di un agente ed ore di tempo libero sono rappresentate dalla funzione di utilità:

$$u(C, L) = 9 \log C + 2L$$

Il salario reale è pari a $0,5$.

- Si determini l'offerta di lavoro dell'agente.

Il problema di massimizzazione da risolvere è il seguente:

$$\max U(C, L) = 9 \log C + 2L \qquad \text{(funzione obiettivo)}$$
$$C = 0,5 \cdot (24 - L) \qquad \text{(vincolo)}$$

Imponiamo la condizione di tangenza tra curva di indifferenza e vincolo di bilancio:

$$\text{MRS} = \frac{w}{p} \qquad \text{cioè,} \qquad \frac{2}{9}C = \frac{1}{2}$$

ottenendo così un consumo pari a $C = \frac{9}{4}$ e sostituendo nel vincolo, un valore per il tempo libero $L = \frac{39}{2}$. Di conseguenza l'offerta di lavoro per l'agente sarà data da: $S_w = 24 - 39/2 = 4,5$.

Alternativamente era possibile sostituire, all'interno della funzione di utilità, il valore di c espresso nel vincolo di bilancio. Massimizzare la funzione cosà determinata calcolando la derivata prima rispetto a L pari a zero:

$$\max_L U = 9 \log \left(12 - \frac{1}{2} \cdot L\right) + 2L$$
$$\frac{dU}{dL} = 0$$
$$\frac{9}{1/2 \cdot (24 - L)} \cdot (-1/2) + 2 = 0$$

Ottenendo infine $L = 39/2$ come fatto precedentemente. Inoltre, calcolando la derivata seconda possiamo notare che è negativa garantendoci di essere in un punto di massimo.

- Come si modificherebbe la scelta se, per legge, non si potesse lavorare più di $\bar{x}$ ore al giorno (con $\bar{x}$ parametro esogeno).

In questo caso se $\bar{x} > S_w$ allora le scelte dell'agente non si modificheranno, mentre nel caso in cui $\bar{x} < S_w$ le scelte del consumatore saranno tali da eguagliare l'offerta di lavoro con il limite posto dalla legge.

2.3. **Esercizio 3.** Si supponga che le preferenze di un consumatore siano rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(C, n) = C \cdot n$$

dove C rappresenta il consumo, n il tempo libero. Sia $p = 1$ il prezzo del bene di consumo e $w = 5$ il salario orario di mercato. Sia inoltre il tempo disponibile pari a $T = 16$.

- Si calcoli e si rappresenti graficamente il vincolo di bilancio, indicando con chiarezza intercette e pendenza. Quale è il significato economico della pendenza del vincolo di bilancio?

Il vincolo di bilancio può essere definito nel seguente modo:

$$pC = w(16 - n) \qquad \text{o,}$$

$$C = \frac{w}{p} \cdot (16 - n)$$

In cui è indicato il valore del consumo (pC), il valore del tempo libero (wn) cioè a quanto sono disposto a rinunciare per avere il tempo libero n. Inoltre la pendenza del vincolo di bilancio è data dal rapporto w/p (in valore assoluto), cioè il salario reale (il prezzo relativo tra tempo libero e consumo).

- Si determini la scelta ottima del consumatore.

La condizione di ottimo sarà data dall'uguaglianza tra MRS e inclinazione del vincolo di bilancio, cioè:

$$MRS = \frac{\partial U/\partial n}{\partial U/\partial C} = \frac{C}{n}$$

quindi

$$\frac{C}{n} = \frac{w}{p}$$

da cui possiamo ricavare:

$$C = \frac{w}{p} \cdot n$$

sostituendo nel vincolo ottengo: $n = 8$ e $C = 40$.

- Supponiamo che ora che il consumatore possa disporre di un reddito non da lavoro paria a $m = 10$. Si determini la nuova scelta ottima.

In questo caso il nuovo vincolo di bilancio sarà dato da:

$$pC = w(16 - n) + m$$

$$C = 5(16 - n) + 10$$

La condizione di ottimo rimane invariata (nessuna variazione nelle curve di indifferenza o nell'inclinazione del vincolo). Di conseguenza sostituendo nel nuovo vincolo di bilancio della condizione precedentemente individuata otteniamo: $n = 9$ e $c = 45$.

3. Produzione

3.1. **Esercizio 1.** Si studi l'andamento della produttività marginale dei singoli input ed i rendimenti di scala, per le seguenti tre funzioni di produzione:

(1) $$y_1 = X_1 + X_2$$

Produttività marginale:

$$MP_{X_1} = MP_{X_2} = \frac{\partial y}{\partial X_{1,2}} = 1 \qquad \text{(produttività marginale costante)}$$

Rendimenti di scala:

$$\begin{aligned} y(tX_1, tX_2) &= tX_1 + tX_2 \qquad \text{con: } t > 1 \\ &= t(X_1 + X_2) \qquad \text{(rendimenti di scala costanti)} \end{aligned}$$

(2) $$y_2 = X_1 \cdot X_2^{1/2}$$

Si può notare che la funzione di produzione y_2 sia una Cobb-Douglas con somma degli esponenti superiore a 1. I rendimenti di scala saranno di conseguenza crescenti. Infatti:

$$y_2(tX_1, tX_2) = tX_1 \cdot (tX_2)^{1/2} = t^{3/2} \cdot X_1 X_2^{1/2} \qquad \text{con: } t > 1$$

La produttività marginale sarà data da:

$$MP_{X_1} = X_2^{1/2} \qquad \text{e} \qquad MP_{X_2} = \frac{X_1}{2X_2^{1/2}}$$

Con quindi MP_{X_1} costante e MP_{X_2} decrescente.

(3) $$Y_3 = X_1^{1/3} \cdot X_2^{1/3}$$

Analogamente al caso precedente possiamo individuare subito i rendimenti di scala decrescenti (Cobb-Douglas con somma degli esponenti inferiore a 1). La produttività marginale è data da:

$$MP_{X_1} = \frac{X_2^{1/3}}{3X_1^{2/3}} \qquad \text{decrescente rispetto a } X_1$$

$$MP_{X_2} = \frac{X_1^{1/3}}{3X_2^{2/3}} \qquad \text{decrescente rispetto a } X_2$$