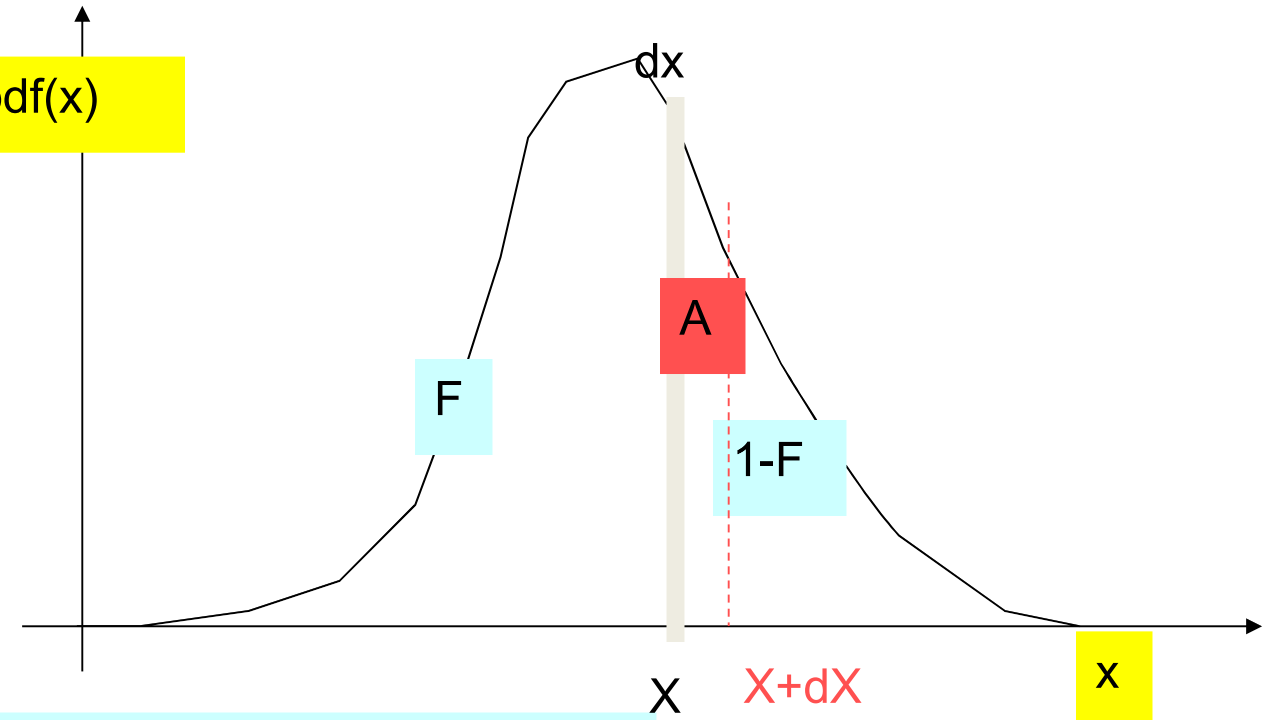
Carico (y) deterministico e resistenza (x) aleatoria
(e.g. struttura soggetta a probabilità di cedimento F)

A(x)=P[x>Y]



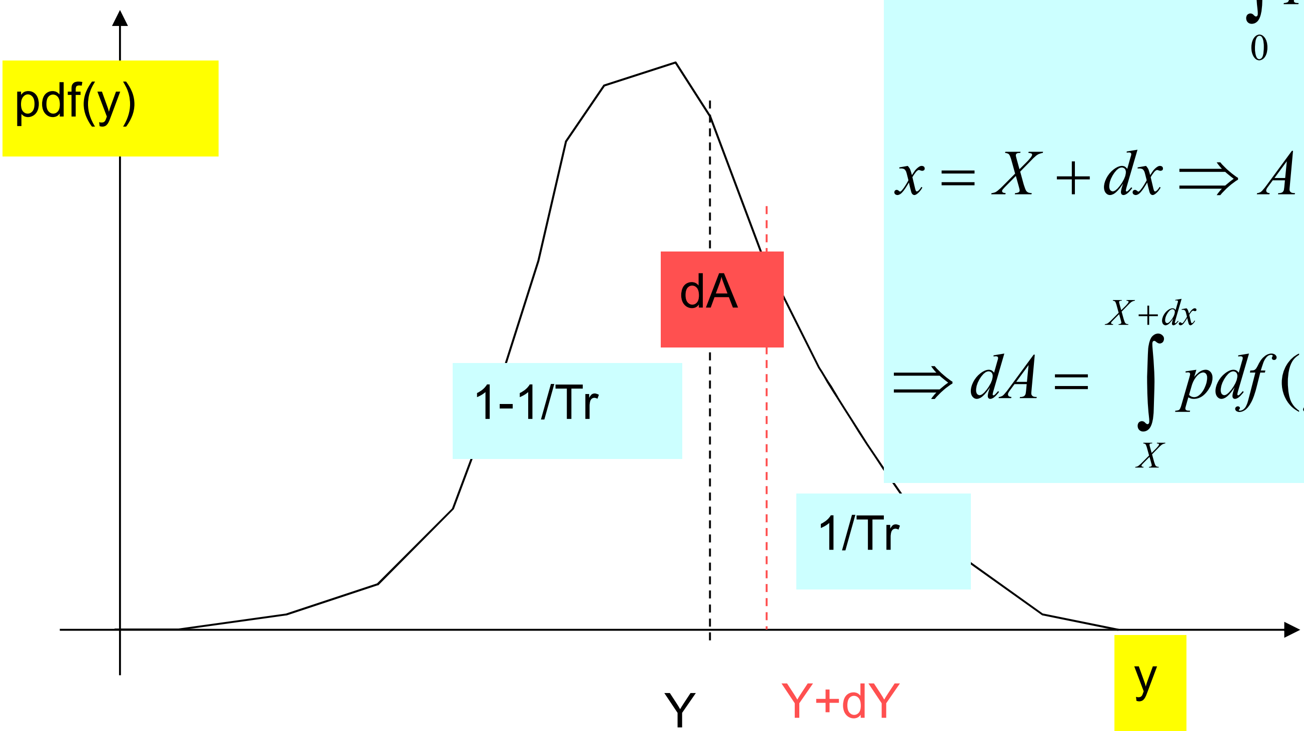
$$A = \int_{Y}^{\infty} pdf(x)\,dx$$

$$x > X = Y \quad pdf(x) = 0 \Rightarrow A = pdf(x)\,dx$$

$$x > X + dX \;\; pdf(x) = 0 \Rightarrow A = \int_{Y}^{X+dX} pdf(x)\,dx$$

Carico (y) aleatorio e resistenza (x) deterministica
(e.g. opera idraulica progettata con riferimento a Tr)

Affidabilità =1-1/Tr   1/Tr=P[y > Y]



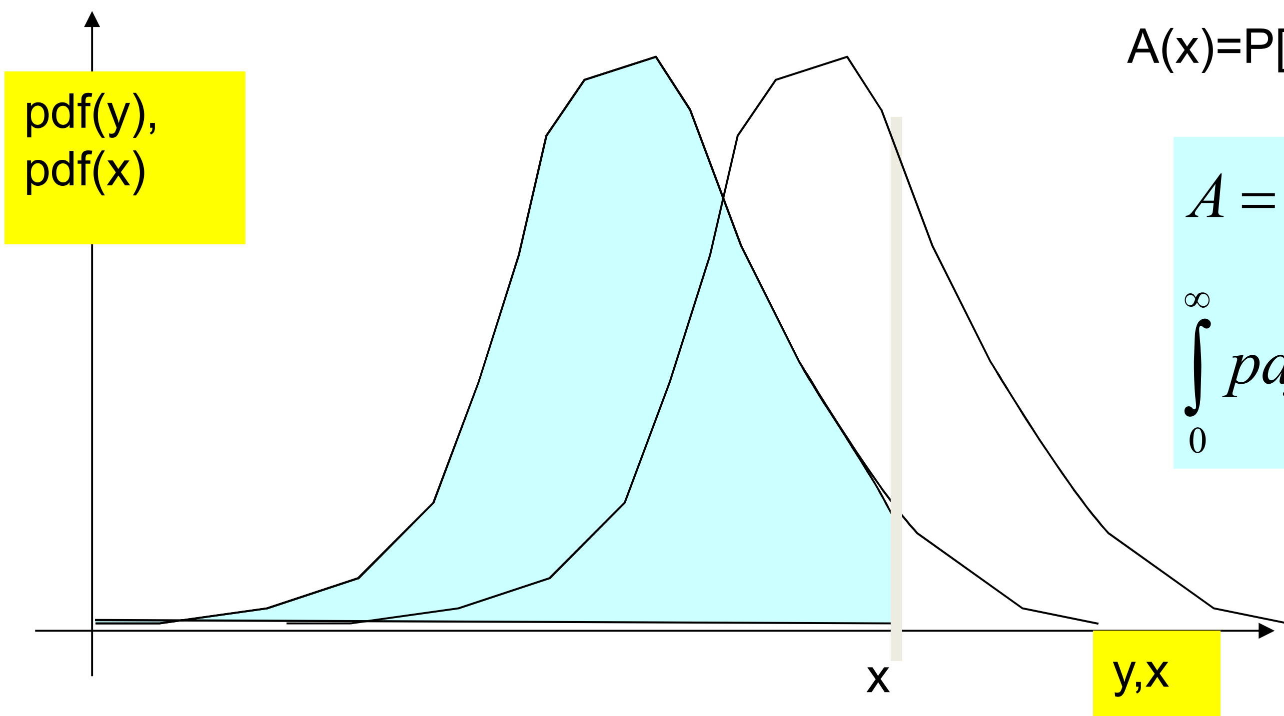
$$x = X \Rightarrow A = \int_0^X pdf(y)\,dy$$

$$x = X + dx \Rightarrow A + dA = \int_0^{X+dx} pdf(y)\,dy$$

$$\Rightarrow dA = \int_X^{X+dx} pdf(y)\,dy$$

Franco dX → dimensioni opera = X+dX →Tr+dTr
→A+dA=1/(Tr+dTr) → dA=dTr(1-A)/(Tr+dTr) = (incremento di affidabilità per franco

Carico (y) aleatorio e resistenza (x) aleatoria
(e.g. opera idraulica progettata con riferimento ad un Tr di progetto)



A(x)=P[x]*P[y<x]

$$A = \int A(x)\,dx =$$

$$\int_0^{\infty} pdf(x) \int_0^{x} pdf(y)\,dy\,dx$$

APPLICAZIONE DELL’ANALISI STATISTICA ALLA VALUTAZIONE DEL RISCHIO IDRAULICO

INCERTEZZA SUL FUNZIONAMENTO DELL’OPERA

2.4 Reliability and hazard functions

We conclude this chapter with a short section on some *functions* of probability density and cumulative distribution functions. These appear sufficiently frequently in some reliability problems that they have been defined in their own right. The first is the *survival function*, which, for a random variable, X, is defined as:

x=strength

$$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) \tag{2.38}$$

This terminology has arisen because if X is considered to be the strength of an object subjected to loading, then the survival function is simply the probability that the strength of the object is greater than the imposed load, The *hazard function*, $h(x)$, is the probability of failure given that no failures have occurred so far:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{2.39}$$

x=time to failure

The hazard function is also termed the *failure rate* or *hazard rate*. It is most often encountered in problems concerning time variation (x replaced by t in Equation 2.39), with the interpretation that the hazard function is the probability that failure occurs for $t \leq T \leq t + \delta t$ given that there have been no failures for $t \leq T$.

The cumulative or integrated hazard function is the integral of the hazard function:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)du = -\ln[1 - F(x)] = -\ln[G(x)] \quad (2.40)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{dF}{1 - F(x)} = -ln[1 - F(x)]\Big|_{-\infty}^{x} = -ln[1 - F(x)]$$

Example 2.20. Find the reliability, hazard and integrated hazard function for the exponential distribution.

Solution. For the exponential distribution we have $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ and $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Thus $G(x) = 1 - F(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$; $h(x) = \lambda$; and $H(x) = -\log(\mathrm{e}^{-\lambda x}) = \lambda x$.

Calcolare il rischio di fallanza,il tasso di fallanza (hazard rate) e la frequenza cumulata di fallanza (integrated hazard function) di un manufatto non riparabile i cui tempi di fallanza (t) seguono una distribuzione di probabilità esponenziale p(t)= k exp(-kt)

$$t = \text{tempo di fallanza}$$

$$\mathrm{p(t)} = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} = \text{densità di probabilità di t}$$

$$\lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} dt = \text{rischio di fallanza al tempo t (tra t e t + dt)}$$

$$\frac{p(t)}{1-\int_0^t p(t)\ dt} = \frac{p(t)}{1-P(t)} = \frac{\lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}}{1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}\right)} = \lambda = \text{tasso di fallanza}$$

$$\int_0^t \frac{p(t)}{1-P(t)}\, dt = \lambda\ t = \text{frequenza cumulata di fallanza}$$

Calcolare il rischio di fallanza, e la frequenza cumulata di fallanza (integrated hazard function) di un manufatto non riparabile il cui tasso di fallanza è h(t)= $\alpha\ \mu^{-\alpha}\ t^{1-\alpha}$

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt = -\ln[1 - F(t)] \text{ frequenza cumulata di fallanza}$$

$$\int_0^t h(t)dt = -\left(\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha} = -\ln[1 - F(t)]$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha}}$$

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \alpha\mu^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha}} \text{ distribuzione di Weibull (a due parametri)}$$

Sono dati i tempi di fallanza osservati per una pompa, in anni {0.6; 1.4; 1.1; 0.9; 0.7; 0.8; 0.8; 1.1; 0.9; 1.2; 1.1; 0.6; 0.8; 1.2; 0.8; 1.0}. Assumendo una distribuzione di tipo esponenziale per il tempo di fallanza, qual è la probabilità che questo sia inferiore a 1 anno?

$$\mathrm{p(t)} = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t} = \text{densità di probabilità di t}$$

$$\mu_t = \int_0^\infty t\lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \text{valore atteso del tempo di fallanza}$$

$$t_i = \{0.6, 1.4, 1.1, 0.9, ..., 1.0\} \quad N = 16$$

$$m_t = \frac{\sum_1^N t_i}{N} = 0{,}94\ anni = \text{media dei tempi misurati di fallanza}$$

$$\text{metodo dei momenti}: \mu_t = m_t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{0{,}94} = 1{,}06 \Rightarrow \mathrm{p(t)} = 1{,}06\ \mathrm{e}^{-1{,}06t}$$

$$P(t) = \int_0^t p(t)\ dt = 1 - \mathrm{e}^{-1{,}06\,t} = \text{probabilità di non superamento di t}$$

$$P(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1{,}06} = 0{,}65 = \text{probabilità che il tempo di fallanza sia t} \le 1$$

Osservazione:

$$p(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} = \text{densità di probabilità di t}$$

$$\mu_t = \int_0^\infty t\, \lambda\, e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \text{valore atteso del tempo di fallanza}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda\, e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda} = \mu_t$$

$$t_i = \{0.6, 1.4, 1.1, 0.9, ..., 1.0\} \quad N = 16$$

$$m_t = \frac{\sum_1^N t_i}{N} = 0{,}94 \text{ anni} = \text{media dei tempi misurati di fallanza}$$

$$s_t = \sqrt{\frac{\sum_1^N (t_i - m_t)^2}{N-1}} = 0.23 \neq 0{,}94\text{anni!!!}$$

Sono dati i tempi di fallanza osservati per una pompa, in anni {0.6; 1.4; 1.1; 0.9; 0.7; 0.8; 0.8; 1.1; 0.9; 1.2; 1.1; 0.6; 0.8; 1.2; 0.8; 1.0}. Assumendo una distribuzione di tipo esponenziale per il tempo di fallanza, e per il tempo di riparazione, e sapendo che il tempo medio di riparazione è stimato essere 36 ore, qual è l'affidabilità della pompa?

$$\mathrm{p(t)} = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} = \text{densità di probabilità di t}$$

$$\mu_t = \int_0^\infty t\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} dt = \frac{1}{\lambda} = \text{valore atteso del tempo di fallanza}$$

$$\text{metodo dei momenti}: \mu_t = m_t \Rightarrow p(t) = 1{,}06\ e^{-1{,}06t}$$

$$r = \text{tempo di riparazione}$$

$$\mathrm{p(r)} = \gamma\ \mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{r}} = \text{densità di probabilità di r} \qquad \mu_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\gamma} = 36 \text{ ore} = 0.004 \text{ anni}$$

$$\mathrm{a} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} = \frac{\mu_t}{\mu_t + \mu_{\mathrm{r}}} = \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} = 0.995 = \text{affidabilità della pompa}$$

ELEMENTI IN SERIE

Se i due elementi sono entrambi indispensabili per il corretto funzionamento del sistema.

La probabilità che il sistema funzioni è pari alla probabilità che tutti i suoi elementi si trovino in funzione

$$A = a \cdot a$$

La probabilità che il sistema si trovi in fallanza è pari alla probabilità che uno o tutti e due i suoi elementi si trovino in fallanza

$$1 - A = 2af + f^2$$

ELEMENTI IN PARALLELO

Se i due elementi non sono entrambi indispensabili per il corretto funzionamento del sistema (un elemento è ridondante).

La probabilità che il sistema funzioni è pari alla probabilità che uno o due elementi si trovino in funzione

$$A = a^2 + 2af$$

La probabilità che il sistema si trovi in fallanza è pari alla probabilità tutti e due i suoi elementi si trovino in fallanza

$$1 - A = f^2$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Generalizzando...

L'affidabilità di un sistema composto da n elementi di cui m necessari e n-m ridondanti è

$$A = \sum_{i=n-m}^{m} \binom{n}{i} \cdot a^i f^{(n-i)} \Rightarrow 1 - A = \sum_{i=1}^{n-m-1} \binom{n}{i} \cdot a^i f^{(n-i)}$$

Se m=0 (elementi in serie)

$$A = a^n \Rightarrow 1 - A = 1 - a^n$$

$$\binom{n}{i} \cdot a^i f^{(n-i)} = \text{probabilità che i elementi funzionino e (n - i) no}$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

$$P(x < k) = \sum_{i=0,k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mu_x = np$$

$$\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} p(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

Si supponga di installare due pompe uguali a servizio di una stazione di sollevamento di un acquedotto industriale, una delle pompe è strettamente necessaria, l'altra ridondante. Entrambe hanno affidabilità a=0.9. Qual è il rischio di fallanza della stazione di sollevamento se la fallanza deriva esclusivamente dal malfunzionamento delle pompe?

$$\mathrm{m} = 1 = \text{numero di pompe necessarie}$$

$$\mathrm{N} = 2 = \text{numero di pompe installate}$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}[\text{numero di pompe funzionanti} < \mathrm{m}] =$$

$$= \text{rischio di fallanza della stazione}$$

$$\mathrm{R} = \binom{\mathrm{N}}{0}(1-a)^{N} = 0.1^{2} = 0.01$$

Si supponga di installare tre pompe uguali a servizio di una stazione di sollevamento di un acquedotto industriale, due pompe sono strettamente necessarie, una è ridondante. Tutte hanno affidabilità a=0.9. Qual è il rischio di fallanza della stazione di sollevamento se la fallanza deriva esclusivamente dal malfunzionamento delle pompe?

$$\mathrm{m} = 2 = \text{numero di pompe necessarie}$$

$$\mathrm{N} = 3 = \text{numero di pompe installate}$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}[\text{numero di pompe funzionanti} < \mathrm{m}] =$$

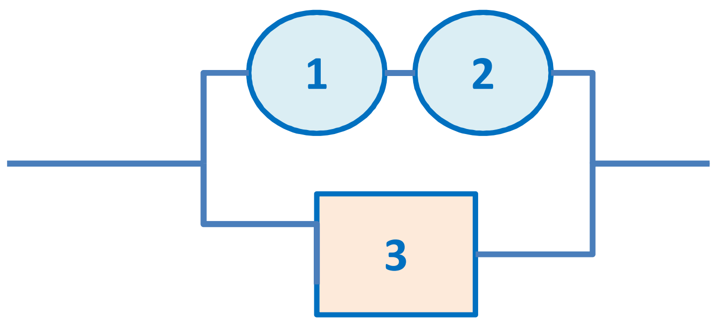
$$= \text{rischio di fallanza della stazione}$$

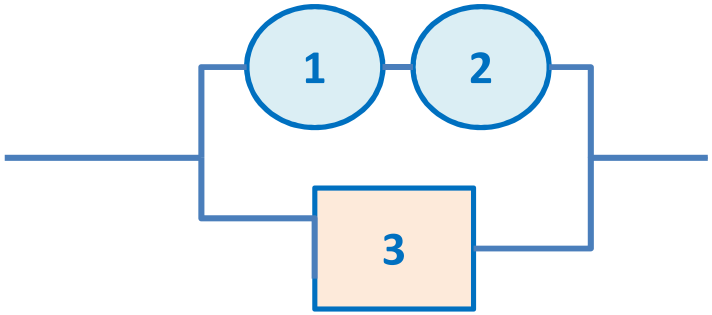
$$\mathrm{R} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{\mathrm{N}}{\mathrm{i}} (1-a)^{N-i} a^{i} =$$

$$\binom{3}{0}(1-a)^{3} + \binom{3}{1}(1-a)^{2} a = 0.028$$

Un sistema idraulico è costituito da tre elementi con tasso di fallanza rispettivamente λ_1=0,02 g^{-1}; λ_2=0,02 g^{-1}; λ_3=0,01 g^{-1}. Il primo ed il secondo funzionano in serie, il terzo è posto in parallelo ai primi due ed è ridondante: entra in funzione se anche solo uno dei primi due sperimenti un guasto.

Sapendo che non sono riparabili, ma possono essere sostituiti in media in 48 ore, calcocale l'affidabilità del sistema complesso.





$$a_i = \frac{MTTF_i}{MTTF_i + MTTR_i} =$$

$$\frac{\lambda_i^{-1}}{\lambda_i^{-1} + \mu_i^{-1}} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

$$\text{tasso di riparazione} = \mu = \frac{1}{2\text{g}} = 0{,}5\ g^{-1}$$

$$a_1 = a_2 = \frac{0{,}5}{0{,}02 + 0{,}5} = 0{,}962$$

$$a_3 = \frac{0{,}5}{0{,}01 + 0{,}5} = 0{,}98$$

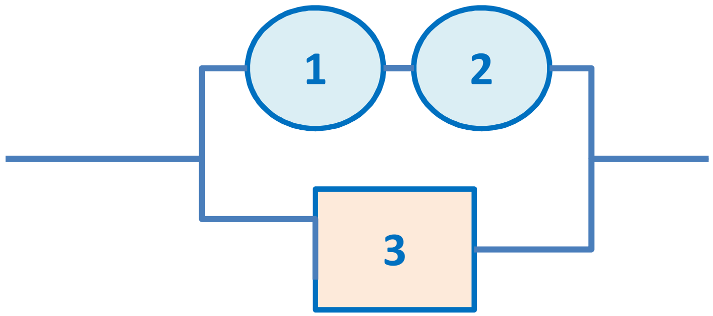
$$a_{sistema} = 1 - (1 - a_1 a_2)(1 - a_3) = a_1 a_2 + a_3 - a_1 a_2 a_3 =$$

$$0{,}925 + 0{,}98 - 0{,}907 = 0{,}989$$

$$h(t) = \text{tasso di fallanza} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt = -\ln[1 - F(t)] \text{ frequenza cumulata di fallanza}$$

$$F(t) = 1 - \underbrace{e^{-\int_0^t h(t)dt}}_{a(t)} = \text{probailità di non superamento del tempo di fallanza}$$



Considerare il tasso di fallanza variabile nel tempo.
In questo caso la distribuzione esponenziale del tempo di fallanza deve essere generalizzata sostituendo a λ_i, $\lambda_i(t)$ e risolvendo l'integrale nel tempo del tasso di fallanza….

$$P(t)_{1+2} = e^{-\int_0^t \lambda_1 dt} \cdot e^{-\int_0^t \lambda_2 dt} = e^{-\int_0^t \lambda_1+\lambda_2 dt} \qquad P(t)_3 = e^{-\int_0^t \lambda_3 dt}$$

$$P(t)_{sistema} = 1-\left(1-\mathrm{P}_{1+2}\right)\left(1-\mathrm{P}_3\right) = \mathrm{P}_{1+2}+\mathrm{P}_3 - \mathrm{P}_{1+2}\mathrm{P}_3$$

$$= e^{-\int_0^t (\lambda_1+\lambda_2)dt} + e^{-\int_0^t \lambda_3 dt} - e^{-\int_0^t (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)dt}$$

$$p(t)_{sistema} = \frac{dP(t)_{sistema}}{dt} \qquad MTBF = \int_0^\infty t\, p(t)_{sistema} dt$$

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = \frac{1}{0{,}04} + \frac{1}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}01} = 175$$

$$a_{sistema} = \frac{MTBF}{MTBF+MTTR} = \frac{175}{177} = 0{,}989$$

APPLICAZIONE DELL'ANALISI STATISTICA ALLA VALUTAZIONE DEL RISCHIO IDRAULICO

INCERTEZZA SULLA FORZANTE IDROLOGICA (CARICO)

Sono date le portate massime annuali misurate nella sezione di chiusura del bacino di un corso d'acqua naturale in m^3/s.
{13.4; 12.1; 12.8; 12.6; 14.1; 12.8; 12.9; 13.1; 12.0; 13.6; 12.9; 13.4; 14.1; 13.9; 11.9; 13.2; 13.4; 12.8}

In corrispondenza di tale sezione, deve essere realizzato un tombino, in grado di far transitare la portata con tempo di ritorno Tr=100 anni. Sapendo che i massimi annuali di portata seguono una distribuzione di Gumbel P(Q), calcolare la portata di progetto.

$P(Q) = \exp\{-\exp-[(Q-a)/b]\}$

$$\mu_x = b + a \cdot \gamma$$

$$\gamma = \text{Euler's constant} \approx 0.5772$$

$$\sigma_x = \frac{\pi}{\sqrt{6}} a$$

$a = 0.7797\ \sigma_Q$
$b = \mu_Q - 0.5772\ a$

σ_Q e μ_Q sono media e deviazione standard di Q

Sono date le portate massime annuali misurate nella sezione di chiusura del bacino di un corso d'acqua naturale in m3/s.
{13.4; 12.1; 12.8; 12.6; 14.1; 12.8; 12.9; 13.1; 12.0; 13.6; 12.9; 13.4; 14.1; 13.9; 11.9; 13.2; 13.4; 12.8}

$$Q_i = \{13.4; 12.1, \ldots, 12.8\} \quad N = 18$$

$$m_Q = \frac{\sum_1^N Q_i}{N} = 13{,}06 \text{ m}^3 s^{-1} =$$

$$= \text{media delle portate massime annuali misurate}$$

$$s_Q = \sqrt{\frac{\sum_1^N (Q_i - m_Q)^2}{N-1}} = 0.66 \text{ m}^3 s^{-1} =$$

$$= \text{scarto quadratico medio delle portate massime annuali misurate}$$

In corrispondenza di tale sezione,deve essere realizzato un tombino,in grado di far transitare la portata con tempo di ritorno Tr=100 anni. Sapendo che i massimi annuali di portata seguono una distribuzione di Gumbel P(Q), calcolare la portata di progetto.

P(Q) =exp{-exp-[(Q-a)/b]}

$a=0.7797\ \sigma_Q$

$b=\mu_Q-0.5772\ a$

σ_Q e μ_Q sono media e deviazione standard di Q

$$\text{metodo dei momenti}: \mu_Q = m_Q; \quad \sigma_Q = s_Q$$

$$a = 0{,}78 \cdot 0{,}66 = 0{,}51$$

$$b = 13{,}06 - 0{,}5772 \cdot 0{,}84 = 12{,}75$$

$$\Rightarrow P(Q) = e^{-e^{-\frac{Q-0{,}51}{12{,}75}}} \Leftrightarrow Q = 12{,}75\{-\ln[-\ln(P)]\} - 0{,}51$$

$$P = 1 - \frac{1}{Tr} = 0{,}99 \Rightarrow Q(Tr = 100) = 58{,}18\ m^3 s^{-1}$$

$$= \text{portata di progetto}$$

Qual è il rischio di fallanza di un opera idraulica progettata per un tempo di ritorno di 50 anni, se la sua vita utile è 30 anni?

$$\text{definizione}: \quad Tr = 1\text{-}\frac{1}{P[X < X_{Tr}]} \Leftrightarrow P[X < X_{Tr}] = 1\text{-}\frac{1}{Tr} = 1\text{-}\frac{1}{50} = 0{,}98$$

$$= \text{probabilità cumulata di non superamento del carico di progetto}$$

$$\text{probabilità complementari}: \quad P[X \geq X_{Tr}] = \frac{1}{Tr} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

$$= P[\text{nell'anno generico venga superata il carico di progetto}]$$

$$A = P[X < X_{Tr} \text{ sempre nell'arco della vita utile M}] = \left(1 - \frac{1}{Tr}\right)^{M} = 0{,}55$$

$$= \text{affidabilità}$$

$$\text{probabilità complementari}: R = 1 - A = 0{,}45 = \text{rischio}$$

Calcolare il tempo di ritorno dell'evento associato al carico di progetto di un opera idraulica con resistenza deterministica, sapendo che il rischio idraulico massimo tollerabile è 0,8 e che la vita utile dell'opera è 10 anni

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{Tr}\right)^{10} = 0{,}8$$

$$(1 - 0{,}8)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{Tr}$$

$$Tr = \frac{1}{1 - (1 - 0{,}8)^{\frac{1}{10}}} = 7\ anni$$

Calcolare Tr se il rischio idraulico massimo tollerabile è 0,5 o 0,2

$$Tr(0{,}5) = \frac{1}{1 - (1 - 0{,}5)^{\frac{1}{10}}} = 15\ anni$$

$$Tr(0{,}2) = \frac{1}{1 - (1 - 0{,}2)^{\frac{1}{10}}} = 45\ anni$$

Calcolare il tempo di ritorno dell'evento associato al carico di progetto di un opera idraulica con resistenza aleatoria e affidabilità pari a 0,7, sapendo che il rischio idraulico massimo tollerabile è 0,8 e che la vita utile dell'opera è 10 anni.

$$R = (1-0{,}7) + 0{,}7 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{Tr}\right)^{10}\right] = 0{,}8$$

$$\left(1 - \frac{0{,}8 - 0{,}3}{0{,}7}\right)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{Tr}$$

$$Tr = \frac{1}{1 - (1 - 0{,}286)^{\frac{1}{10}}} = 30\ anni$$

Le portate minime annuali Q [m^3/s] in una sezione di un corso d'acqua seguono la distribuzione di Weibull

$$F(Q) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{Q}{11{,}8}\right)^2\right]$$

Calcolare il rischio R=P[Q<4 m^3/s]

$$F(4) = P(Q \leq 4) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{4}{11{,}8}\right)^2\right] = 0{,}11$$

Calcolare il rischio di insufficienza idrica per un sistema di raccolta e distribuzione di acqua piovana, sapendo che è in grado di soddisfare la domanda irrigua per 10 gg successivi di tempo secco e che la durata del periodo di tempo secco segue una distribuzione esponenziale con media 30 gg.

$$p = \frac{1}{30} e^{-\frac{t}{30}} \Rightarrow P[t \le T] = \int_0^T p\, dt = 1 - e^{-\frac{T}{30}}$$

$$R = 1 - P[t \le 10gg] = e^{-\frac{10}{30}} = 0{,}716$$

Un sistema di raccolta e distribuzione di acqua piovana è in grado di soddisfare la domanda irrigua del 100% di un area coltivata per 10 gg successivi di tempo secco.
La resa complessiva dell'attività agricola è G=10000 euro.
Coltivando una percentuale x dell'area la resa si riduce a $x^{0,8} \cdot 10000$ euro ed il sistema di raccolta e distribuzione può soddisfare la domanda irrigua dell'area ridotta per $10 \cdot x^{-1}$ gg.
Sapendo che la durata del periodo di tempo secco segue una distribuzione esponenziale con media 30 gg e che in caso di fallanza dell'impianto di irrigazione il raccolto viene perso, calcolare la frazione ottima di terreno da coltivare.

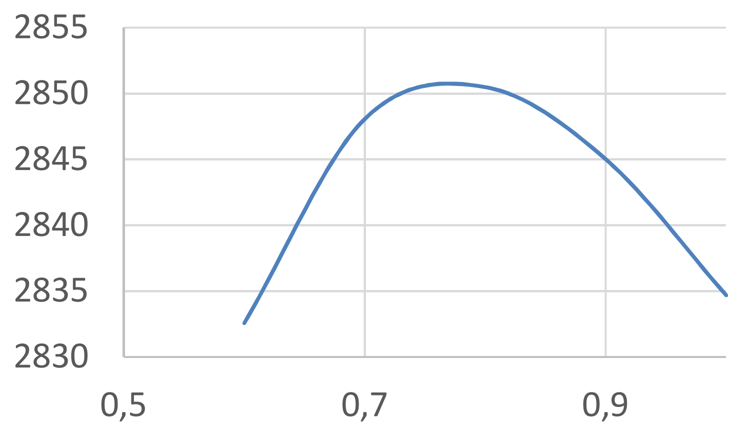
$$R = P\left[t \geq \frac{10}{x}\right] = e^{-\frac{10}{x\cdot 30}}$$

$$G\cdot x^{0,8}\cdot(1-R) = 10000\cdot x^{0,8}\cdot(1-R) = 10000\cdot x^{0,8}\cdot\left(1-e^{-\frac{10}{x\cdot 30}}\right)$$

$$\frac{dG}{dx} = 10000\cdot 0,8\cdot x^{-0,2}\left(1-e^{-\frac{10}{x\cdot 30}}\right) - 10000\cdot x^{0,8}\cdot\frac{10}{x^2\cdot 30}e^{-\frac{10}{x\cdot 30}} = 0$$

$$1 = \left(\frac{10}{x^{1,2}\cdot 30}+1\right)e^{-\frac{10}{x\cdot 30}}$$

x	$G\cdot x^{0.8}\cdot(1-R)$
0,6	2832
0,7	2848
0,8	2850
0,9	2845
1	2834

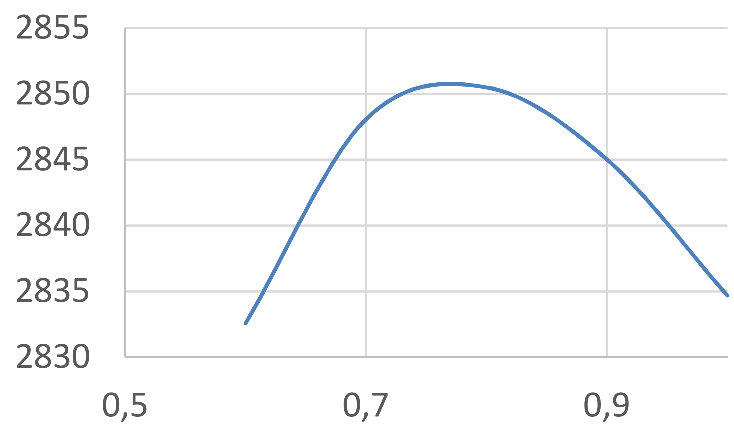


Nell'anno generico di attività agricola

$$R = P\left[t \geq \frac{10}{x}\right] = e^{-\frac{10}{x \cdot 30}}$$

$$G \cdot x^{0.8} \cdot (1 - R)$$

Nell'arco di un periodo di attività lungo N anni, il guadagno atteso in assenza di rschi è NG, il valore atteso della perdita dovuta al rischio idraulico è G·E[i], con E[i]= valore atteso del numero di anni in cui si verifica un evento siccitoso. Se i segue una distribuzione binomiale con parametric N e R → E[i]=NR



$$Guadagno - Perdita = G \cdot x^{0.8} \cdot N - G \cdot x^{0.8} \cdot RN = N \cdot G \cdot x^{0.8} \cdot (1 - R)$$

APPLICAZIONE DELL'ANALISI STATISTICA ALLA VALUTAZIONE DEL RISCHIO IDRAULICO

NON STAZIONARIETA'

Col tempo, le condizioni ambientali in cui si trova in funzione un Sistema di distribuzione fanno aumentare il suo tasso di fallanza, consentendo però di effettuarne anche interventi di riparazione in tempi progressivamente ridotti. Come varia la sua affidabilità per unità di lunghezza se il tasso di rottura e riparazione sono rispettivamente:

$\lambda(t) = 0{,}015+0{,}003 \cdot t$

$\mu(t) = 0{,}1+0{,}01 \cdot t^2$

t [anni]

Si prevede un anno in cui il rischio sia pari a 0,05?

$$a = \frac{\mu(t)}{\lambda(t)+\mu(t)} = \frac{0{,}1+0{,}01\cdot t^2}{0{,}1+0{,}01\cdot t^2+0{,}015+0{,}003\cdot t}$$

t	a
1	0,859375
2	0,869565
3	0,88785
4	0,905923
5	0,921053
6	0,933063
7	0,942492
8	0,949936
9	0,955882
10	0,960699

L'affidabilità aumenta, ed è pari a 95% dopo 9 anni.

Una struttura idraulica viene dimensionata per un tempo di ritorno di 20 anni, pari alla sua vita utile, nell’arco della quale la probabilità di superamento del carico di progetto cresce di anno in anno, linearmente:

$p_t=p_1+at$

$p_1=1/20=0.05$

$a=0.01$ anni^{-1}

Qual’è il rischio di fallanza

1) Secondo un impostazione stazionaria dell’analisi di rischio?
2) secondo un impostazione non stazionaria?

$$Tr = \sum_{m=1}^{\infty} m F^{m-1}(1-F) = \frac{1}{1-F} = \frac{1}{P} = \sum_{m=1}^{\infty} F^{m}$$

$$E[m,Tr] = \sum_{m=1}^{\infty} m \binom{Tr}{m} (1-P)^{Tr-m} P^{m} = Tr\ P$$

$$\boxed{\begin{aligned} Tr &= \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} (1-P_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} F_i \\ E[m,Tr] &= 1 = \sum_{1=1}^{Tr} P_i \end{aligned}}$$

1) Secondo un impostazione stazionaria dell'analisi di rischio

$$R = \sum_{x=1}^{n} f(x) = p \sum_{x=1}^{n} (1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^n$$

$$p_1 = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$R = 1 - \left(1 - p_1\right)^{20} = 0{,}64$$

2) secondo un impostazione non stazionaria

$$R = \sum_{x=1}^{n} p_x \prod_{t=1}^{x-1} (1-p_t) = 1 - \prod_{t=1}^{n} (1-p_t)$$

i	Pi	1-Pi	1/Pi		Prod
1	0,05	0,95	20		0,95
2	0,06	0,94	17		0,89
3	0,07	0,93	14		0,83
4	0,08	0,92	13		0,76
5	0,09	0,91	11		0,69
6	0,10	0,90	10		0,62
7	0,11	0,89	9		0,56
8	0,12	0,88	8		0,49
9	0,13	0,87	8		0,43
10	0,14	0,86	7		0,37
11	0,15	0,85	7		0,31
12	0,16	0,84	6		0,26
13	0,17	0,83	6		0,22
14	0,18	0,82	6		0,18
15	0,19	0,81	5		0,14
16	0,20	0,80	5		0,11
17	0,21	0,79	5		0,09
18	0,22	0,78	5		0,07
19	0,23	0,77	4		0,05
20	0,24	0,76	4		0,04

$n=20$

$p_t=p_1+0{,}01\cdot t=0{,}05+0{,}01\cdot t$

$$R=\sum_{x=1}^{n} p_x \prod_{t=1}^{x-1}(1-p_t)=1-\prod_{t=1}^{n}(1-p_t)$$

$R=1-0{,}04=0{,}96$

$$Tr=\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}(1-P_i)$$

Tr=8 anni

Una struttura idraulica ha vita utile pari a 20 anni, nell'arco della vita dell'opera la probabilità di superamento del carico di progetto cresce di anno in anno, linearmente:

$p_t=p_1+at$

$a=0.01$ anni^{-1}

Al fine di ridurre il tempo di ritorno della fallanza a 10 anni, quale deve essere il tempo di ritorno di progetto riferito all'anno della posa in opera $Tr=1/p_1$?

$$T = E(X) = \sum_{x=1}^{x_{\max}} x f(x) = \sum_{x=1}^{x_{\max}} x p_x \prod_{t=1}^{x-1} (1 - p_t)$$

$$T = E(X) = 1 + \sum_{x=1}^{x_{\max}} \prod_{t=1}^{x} (1 - p_t)$$

i	Pi	1-Pi	1/Pi	Prod	Somm
1	0,03	0,98	40	0,98	0,97
2	0,04	0,97	29	0,94	1,90
3	0,05	0,96	22	0,90	2,79
4	0,06	0,95	18	0,85	3,62
5	0,07	0,94	15	0,79	4,39
6	0,08	0,93	13	0,73	5,10
7	0,09	0,92	12	0,67	5,75
8	0,10	0,91	11	0,61	6,33
9	0,11	0,90	10	0,54	6,85
10	0,12	0,89	9	0,48	7,31
11	0,13	0,88	8	0,42	7,70
12	0,14	0,87	7	0,36	8,05
13	0,15	0,86	7	0,31	8,34
14	0,16	0,85	6	0,26	8,58
15	0,17	0,84	6	0,22	8,78
16	0,18	0,83	6	0,18	8,95
17	0,19	0,82	5	0,15	9,08
18	0,20	0,81	5	0,12	9,19
19	0,21	0,80	5	0,09	9,28
20	0,22	0,79	5	0,07	9,34

$$T = E(X) = 1 + \sum_{x=1}^{x_{\max}} \prod_{t=1}^{x} (1 - p_t)$$

$n=20$

$p_t=p_1+0{,}01\cdot t$

$p_1=0{,}03 \rightarrow T=10$

Nella fase di invecchiamento di un manufatto non riparabile i cui tempi di fallanza (t) seguono una distribuzione di probabilità esponenziale p(t)= k exp(-kt), il tempo medio di fallanza 1/k nei primi 10 anni di vita è costante MTTF=1/k_0, successivamente, negli anni dall'11° al 20° diminuisce progressivamente secondo la relazione: t'= 1/(k_0+at). Qual è il rischio di fallanza in 20 anni di vita dell'opera?

In a nonhomogeneous Poisson process with time-dependent ROCOF, $\lambda(t)$, the number of failures in the time interval $(t_1, t_2]$ has a Poisson distribution with mean

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt \qquad (17)$$

Thus the probability of no failures in $(t_1, t_2]$ is

$$\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt\right] \qquad (18)$$

$k = \text{tasso di fallanza}$

$\text{k} = k_0 \quad \text{per 10 anni}$

$\text{k(t)} = k_0 + \text{at} \quad \text{dall'11° anno al 20°}$

$$\Rightarrow R = 1 - \underbrace{e^{-\int_0^{10} k_0 \, dt}}_{\substack{\text{nessuna fallanza} \\ \text{nei primi 10 anni}}} \cdot \underbrace{e^{-\int_0^{10} (k_0 + at) dt}}_{\substack{\text{nessuna fallanza} \\ \text{nei successivi 10 anni} \\ \text{(tasso di fallanza variabile)}}} =$$

$$1 - e^{-k_0 \cdot 10} e^{-k_0 \cdot 10 - \frac{1}{2} a \cdot 100} =$$

$$1 - e^{-k_0 \cdot 20 - a \cdot 50}$$

Nella fase di invecchiamento di un manufatto riparabile i cui tempi di fallanza (t) seguono una distribuzione di probabilità esponenziale p(t)= k exp(-kt), il tempo medio di fallanza 1/k nei primi 10 anni di vita è costante MTTF=2 anni, successivamente, negli anni dall'11° al 20° diminuisce progressivamente secondo la relazione: t'= 1/(2+0.2t). Il tempo medio di riparazione è 30 giorni Qual è il rischio di fallanza in 20 anni di vita dell'opera?

In a nonhomogeneous Poisson process with time-dependent ROCOF, $\lambda(t)$, the number of failures in the time interval $(t_1, t_2]$ has a Poisson distribution with mean

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt \tag{17}$$

Thus the probability of no failures in $(t_1, t_2]$ is

$$\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt\right] \tag{18}$$

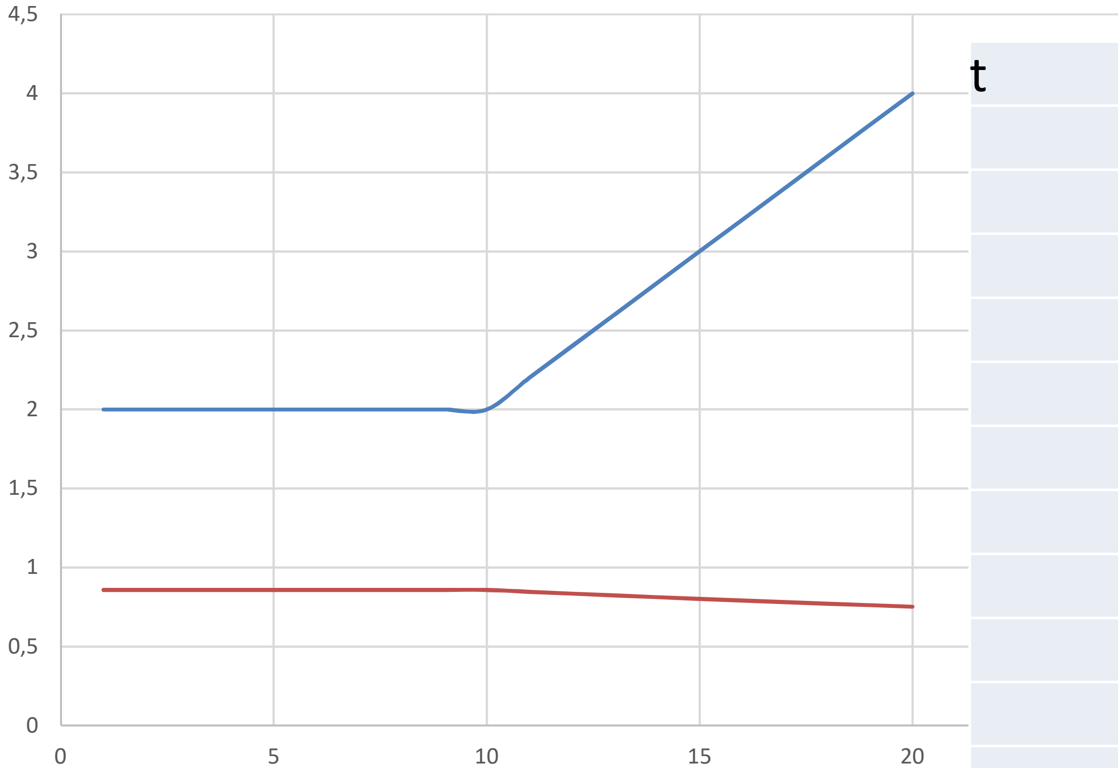
$$0.5\ anni^{-1} = \text{tasso di fallanza per 10 anni}$$

$$\mathrm{k(i)} = \left(2 + 0.2\mathrm{i}\right)^{-1}\ anni^{-1} \quad \text{dall'11° anno al 20°}$$

$$\text{tasso di riparazione} = \frac{1}{30}\ g^{-1} = 12\ anni^{-1}$$

$$a(i) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{12 + 0.5} & i = 1 \div 10 \\[2ex] \dfrac{\left(2 + 0.2\mathrm{j}\right)^{-1}}{12 + \left(2 + 0.2\mathrm{j}\right)^{-1}} & i = 11 \div 20, \quad j = i - 10 \end{cases}$$

$$R = 1 - \prod_{i=1}^{20} a(i) = 0{,}97$$



t	k0+at	a(t)
1	2	0,858823529
2	2	0,858823529
3	2	0,858823529
4	2	0,858823529
5	2	0,858823529
6	2	0,858823529
7	2	0,858823529
8	2	0,858823529
9	2	0,858823529
10	2	0,858823529
11	2,2	0,846867749
12	2,4	0,835240275
13	2,6	0,823927765
14	2,8	0,812917595
15	3	0,802197802
16	3,2	0,79175705
17	3,4	0,781584582
18	3,6	0,77167019
19	3,8	0,762004175
20	4	0,75257732

$$\text{tasso di riparazione} = \frac{1}{30}\, g^{-1} = 12\ anni^{-1}$$

$$a(i) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{12+0.5} & i = 1 \div 10 \\[2ex] \dfrac{(2+0.2\mathrm{j})^{-1}}{12+(2+0.2\mathrm{j})^{-1}} & i = 11 \div 20, \quad j = i-10 \end{cases}$$

$$R = 1 - \prod_{i=1}^{20} a(i) = 0{,}97$$