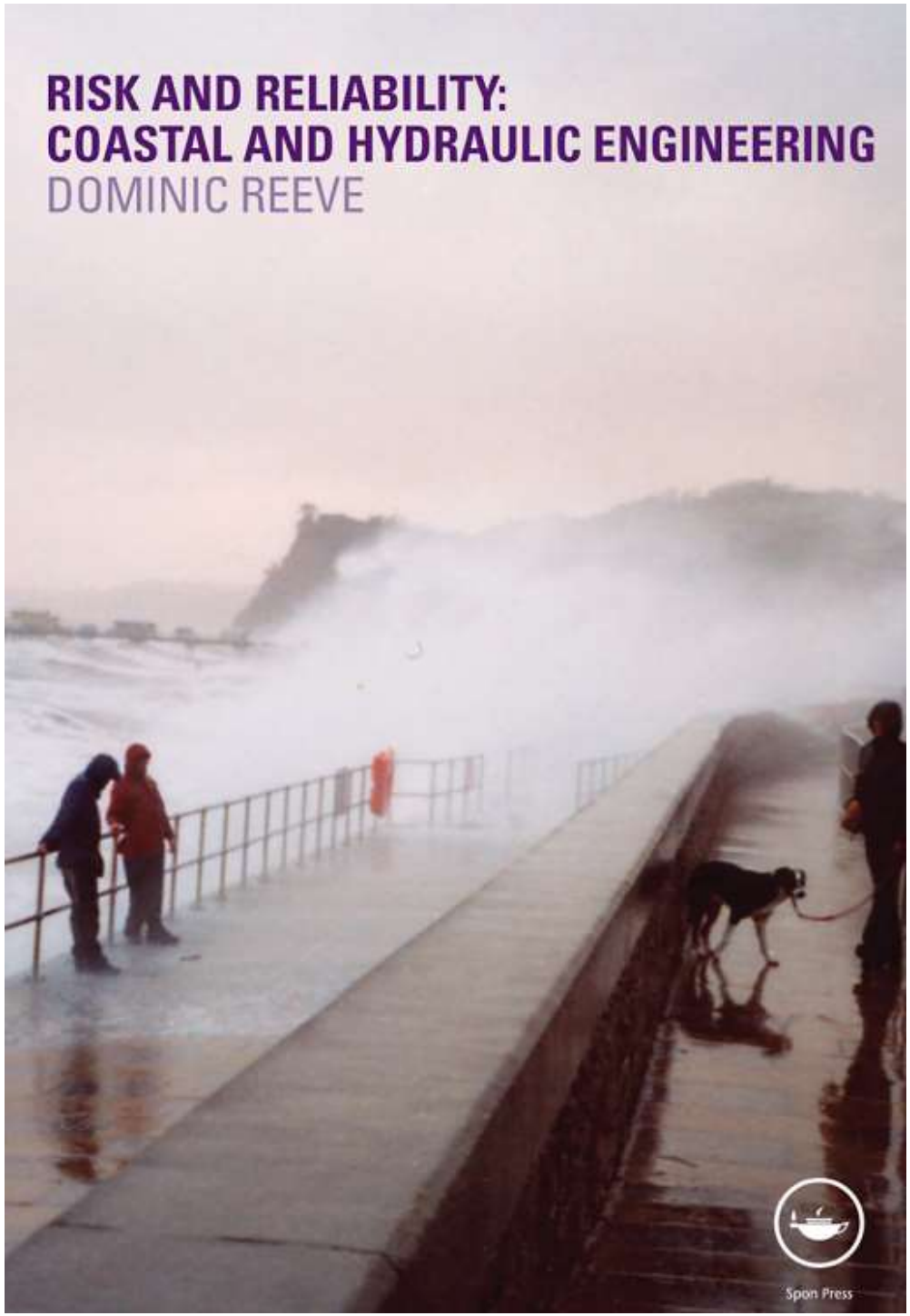

RISK AND RELIABILITY:
COASTAL AND HYDRAULIC ENGINEERING
DOMINIC REEVE
Spon Press

2.1.6 *Axioms of probability*

By convention, there are certain desirable properties for probabilities to have, termed 'axioms'. Writing S as the sample space and $P(E)$ as the probability of an event E occurring in an experiment we define the following characteristics for probabilities:

1 For any event $E, 0 \leq P(E) \leq 1$
2 If E_i are mutually exclusive events then

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \equiv P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \tag{2.4}$$

3 If $E = \emptyset$, then $P(E) = 0$, and the event is said to be impossible
4 If $E = S$, then $P(S) = 1$, and the event E is said to be certain

Equation (2.4) is often known as the *theorem of total probability*. By considering the two events E and its complement E', we know that $E \cup E' = S$. So $P(E \cup E') = 1$. But $P(E \cup E') = P(E) + P(E')$ because E and E' are mutually exclusive. Thus,

$$P(E') = 1 - P(E) \tag{2.5}$$

Risk+Reliability=1

Equations (2.4) and (2.5) are very important as they will be used repeatedly in later chapters.

Probabilità condizionata

The probability of an event *B* occurring, given that event A has already occurred, is denoted $P(B|A)$. The conditional probability is defined as

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.6}$$

The events A and B are called *statistically independent* if

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.7}$$

The events A and B are conditionally independent given C if

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \tag{2.8}$$

Alcune proprietà delle distribuzioni di probabilità chiamate *assiomi* vengono usate frequentemente nell'analisi di rischio, e sono di seguito elencate.

Detto S l'insieme dei possibili esiti di un esperimento, e $P[E]$ la probabilità che l'esito sia E,

- per ogni esito possibile E, $0 \leq P[E] \leq 1$
- Se E_i sono una serie di eventi mutuamente esclusivi, e sono possibili esiti dell'esperimento,

  $P[E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n] = \sum_{i=1}^{n} P[E_i]$
- Se l'evento E è impossibile, $E = \oslash$ e $P[E] = 0$
- Se E è certo, $E = S$ e $P[E] = 1$.

Gli assiomi trovano frequente ed utile applicazione nella definizione di affidabilità A e rischio R. Si considerino l'evento E ed il suo complementare E'. Essendo complementari, $E \cup E' = S$ Quindi, $P[E \cup E'] = 1$, ma anche, essendo mutuamente esclusivi $P[E \cup E'] = P[E] + P[E']$. Ne deriva che

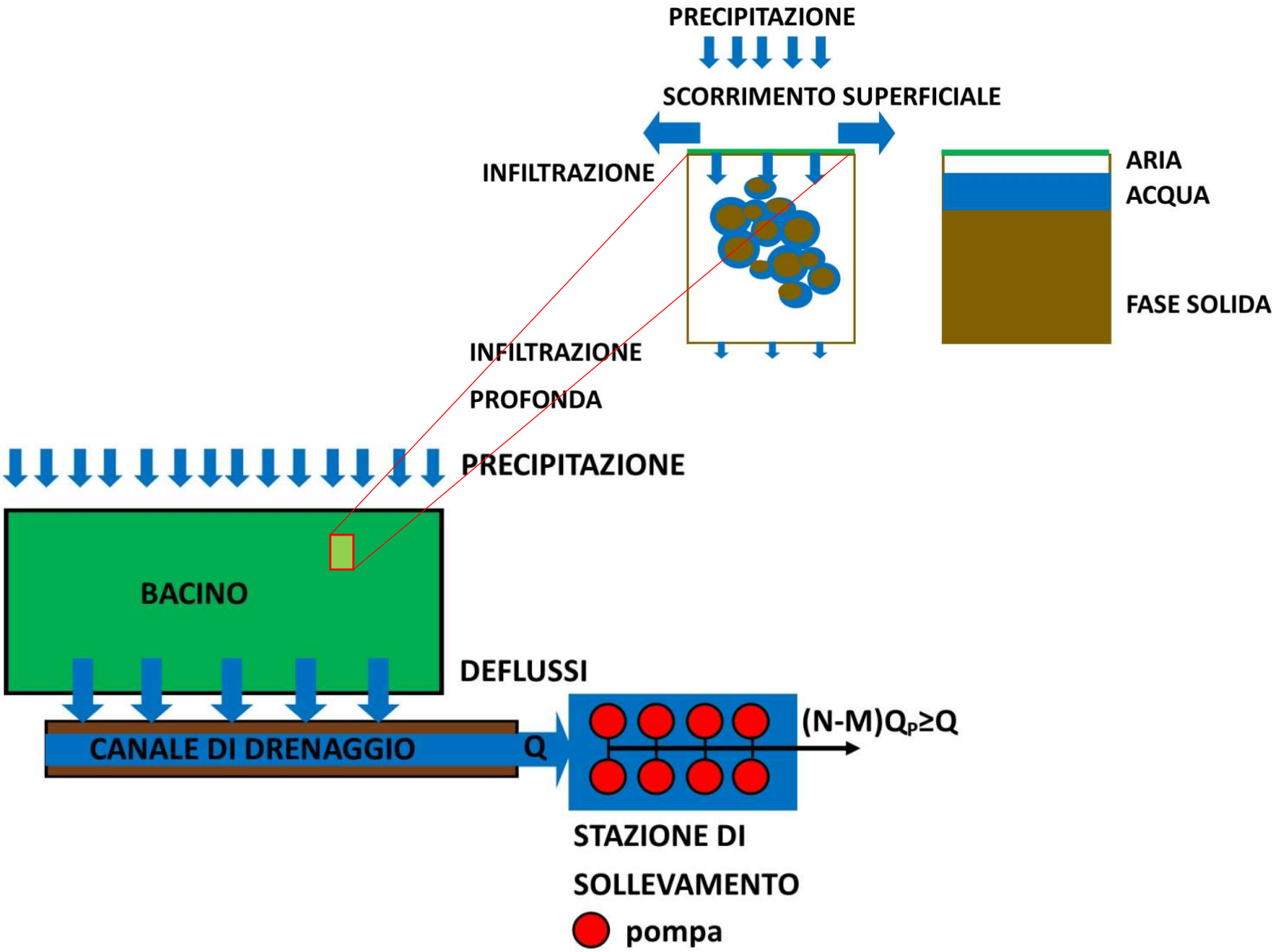
$$P[E'] = 1 - P[E].$$

Esempio: Il rischio idraulico R è la probabilità di fallanza di un opera idraulica o di un sistema idraulico naturale che svolge una funzione all'interno del ciclo idrologico. L'affidabilità A è la probabilità che l'opera idraulica o il sistema idraulico naturale svolgano, correttamente la loro funzione. Quindi, R e A sono probabilità di eventi complementari e tra loro sussiste la relazione:

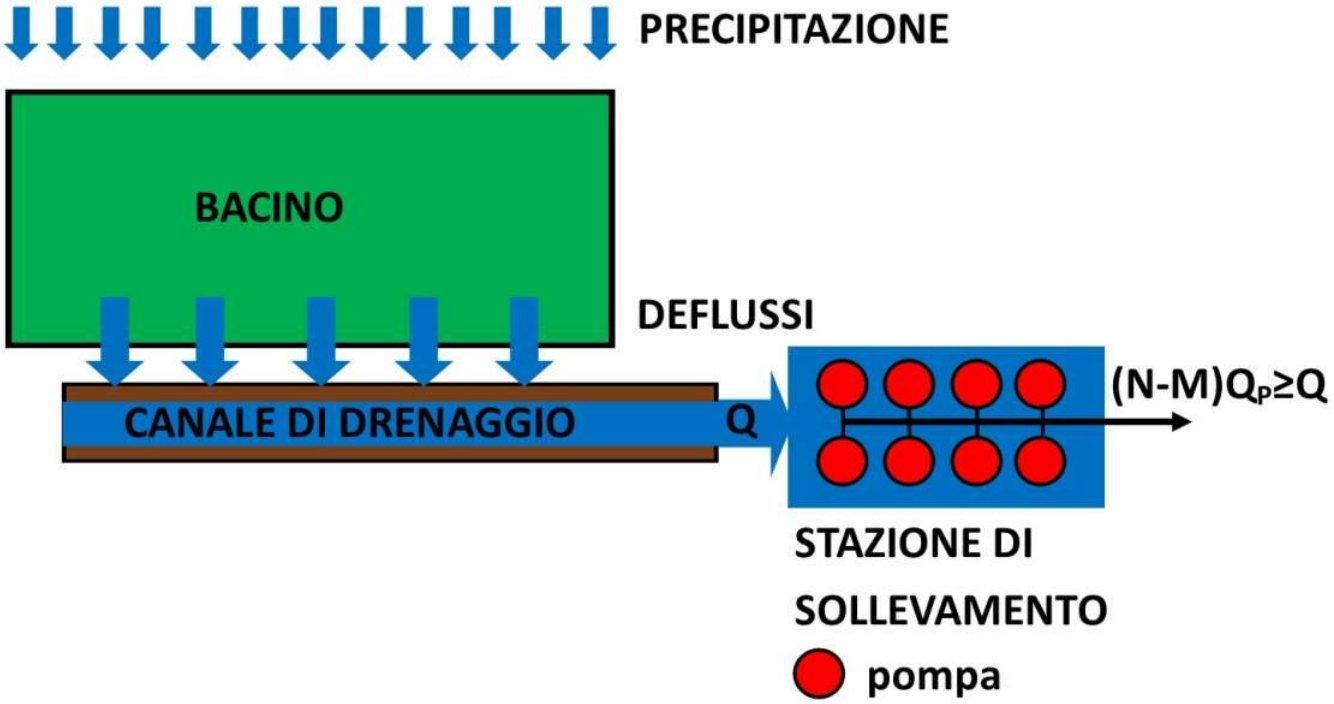
$$R = 1 - A.$$

Esempio

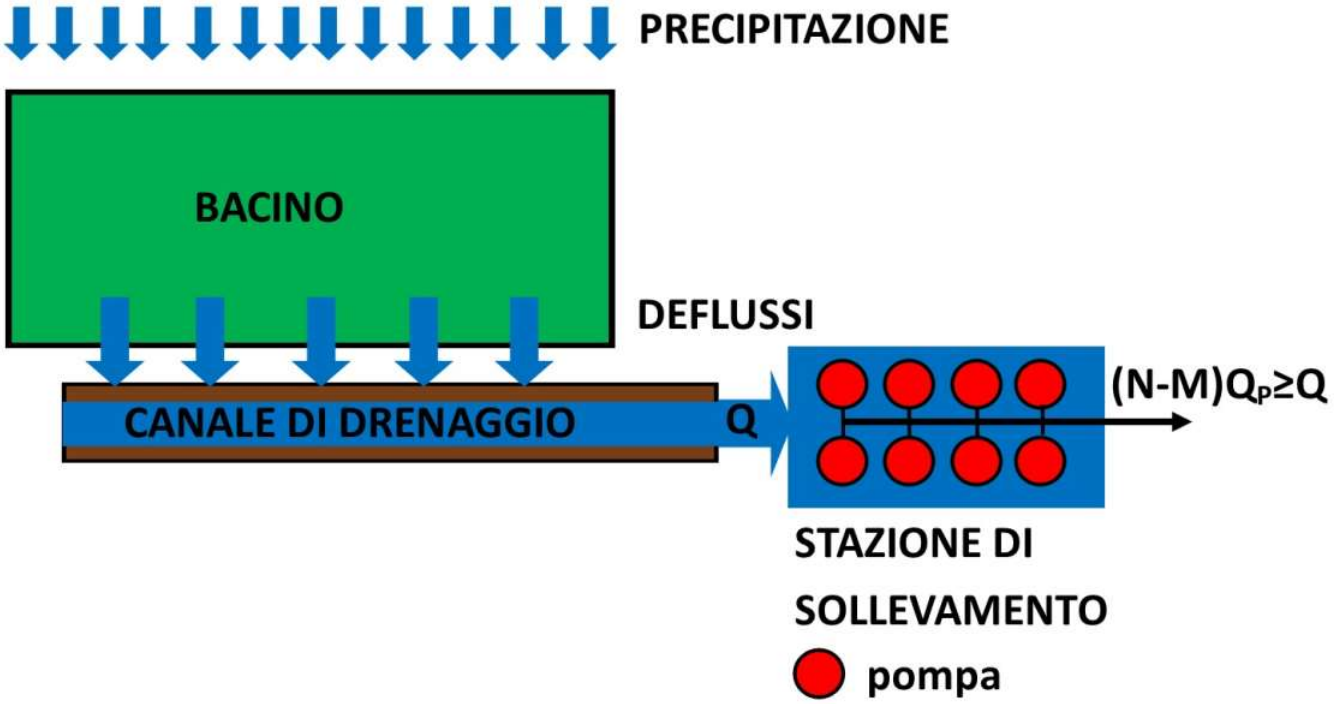
Rischio di fallanza di una rete di drenaggio


PRECIPITAZIONE
SCORRIMENTO SUPERFICIALE
INFILTRAZIONE
ARIA
ACQUA
FASE SOLIDA
INFILTRAZIONE
PROFONDA
PRECIPITAZIONE
BACINO
DEFLUSSI
CANALE DI DRENAGGIO
Q
(N-M)Q_P≥Q
STAZIONE DI
SOLLEVAMENTO
pompa

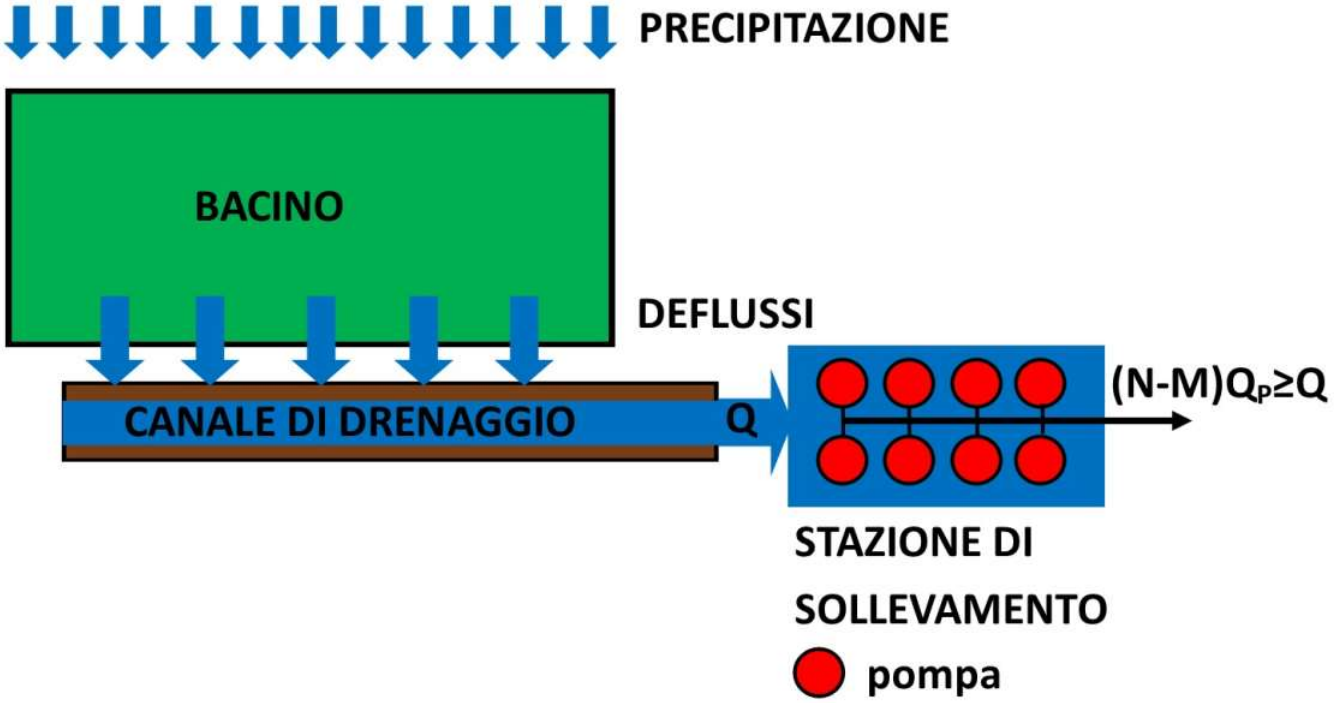
la probabilità che si verifichi un evento di precipitazione di entità tale da generare una portata superiore a Q è $P_Q[Q]$, il rischio che il canale esondi è $R_C = P_Q[Q]$, l'affidabilità del canale è $A_C = 1 - P_Q[Q]$ e $A_C + R_C = 1$.



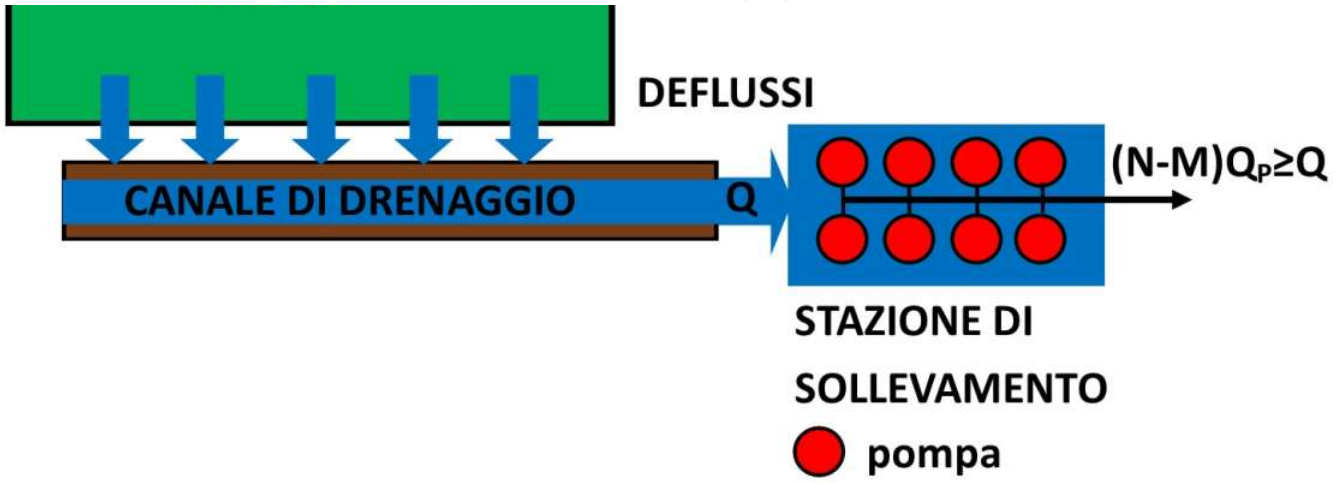
Lo scarico non può avvenire dalla sezione terminale del canale al ricettore, per effetto della gravità e quindi una serie di pompe, installate nella stazione, sollevano la portata Q, drenata dal canale, e scaricano nel ricettore finale la portata $Q_S \geq Q$, eventualmente funzionando ad intermittenza se $Q_S > Q$, grazie alla presenza di una vasca di compenso.



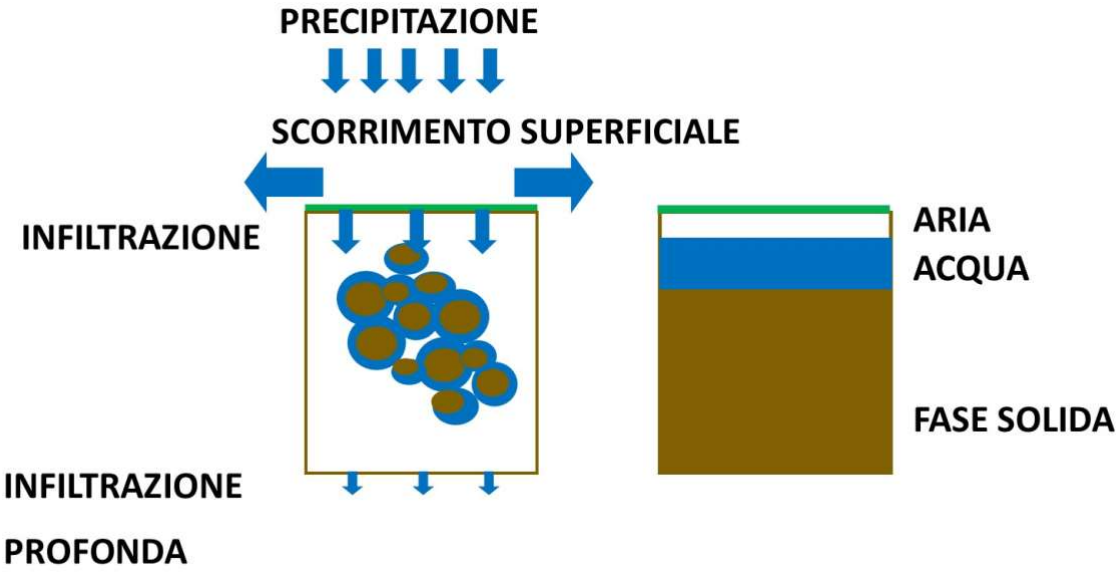
Spesso sono installate in numero sovrabbondante, ovvero alcune pompe sono ridondanti e non entrano in funzione (ciclicamente). Se M pompe sono ridondanti, ciò significa che $(N-M)\cdot Q_P \geq Q$ e $(N-M-1)\cdot Q_P < Q$. Se il numero di pompe che non entrano in funzione quando è richiesto è $F > M$, a causa di guasti accidentali, e di conseguenza $(N-F)\cdot Q_P < Q$, la stazione di sollevamento non può svolgere la sua funzione. Se $P_F[F]$ è la probabilità che ci siano F pompe in fallanza, il rischio di fallanza della stazione (sistema complesso) è la probabilità che sia $F > M$: $R_{SS} = P_F[M+1] + P_F[M+2] + ...P_F[N]$. La



probabilità che ci siano F su N pompe in fallanza è funzione del rischio di fallanza della singola pompa. Se il rischio di fallanza di ogni pompa è R_P e la sua affidabilità $A_P = 1 - R_P$, le pompe sono tutte uguali, come spesso e necessariamente avviene se vengono fatte funzionare a rotazione, ed il funzionamento dell'una è un evento aleatorio indipendente dallo stato di funzionamento delle altre (si escludono quindi i casi di malfunzionamento e.g. dovuti ad un interruzione di alimentazione elettriche che comporterebbe la fallanza contemporanea delle N pompe), ci sono $\binom{N}{F} = \frac{N!}{F!(N-F)!}$ combinazioni di F su N pompe, e quindi la probabilità che F pompe su N siano contemporaneamente in fallanza (ciascuna con probabilità di esserlo uguale a R_P), mentre $N - F$ si trovino contemporaneamente in funzione (ciascuna con probabilità di essere in funzione pari a A_P) è $P_F[F] = \binom{N}{F} \cdot R_P^F \cdot A_P^{(N-F)}$.



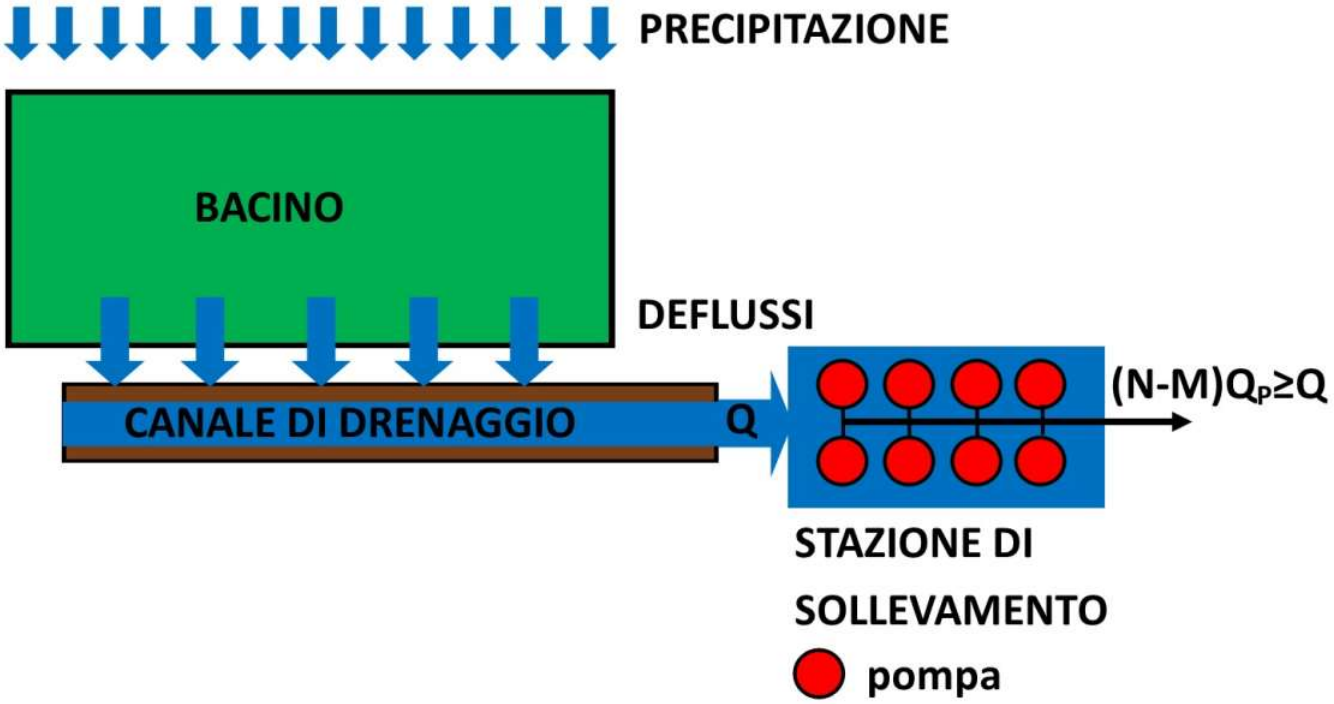
$$Q = P - I$$



nella quale Q è la portata dei deflussi superficiali, P è la portata meteorica (volume di precipitazione che giunge al suolo nell'unità di tempo) e I è la portata che si infiltra (volume che attraversa la superficie del terreno e non origina deflussi superficiali, per unità di tempo).

La capacità di infiltrazione del terreno è la sua resistenza al carico $P - Q$. Se la probabilità che la capacità di infiltrazione del terreno sia inferiore alla sua capacità massima I è $P_I[I]$ il rischio di fallanza del sistema suolo è $R_S = P_I[I]$.

canale di drenaggio, la stazione di sollevamento ed il bacino possono essere considerati parte di un unico sistema complesso che entra in fallanza quando uno dei suoi elementi entra in fallanza e funziona bene se tutti funzionano bene, con probabilità di funzionare bene pari a $A = (1 - R_C) \cdot (1 - R_{SS}) \cdot (1 - R_S)$ e rischio idraulico di fallanza $R = 1 - A$.



Esempio

Rischio di fallanza di una rete di **drenaggio**

Urban water drainage

(drenaggio urbano)

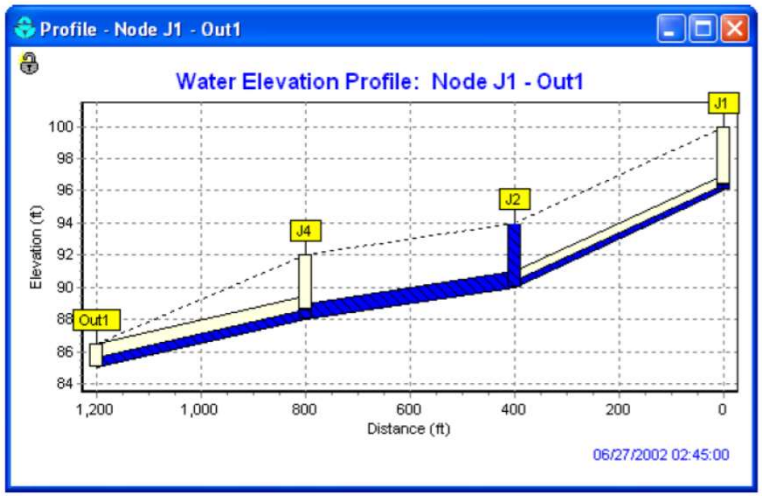
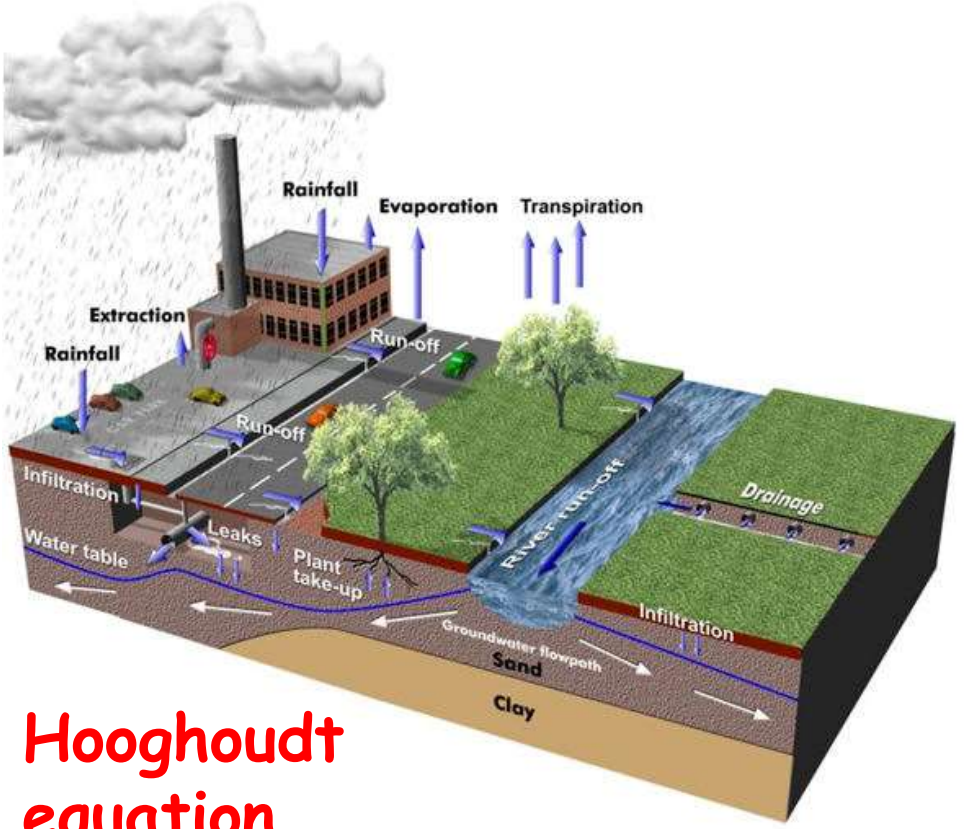


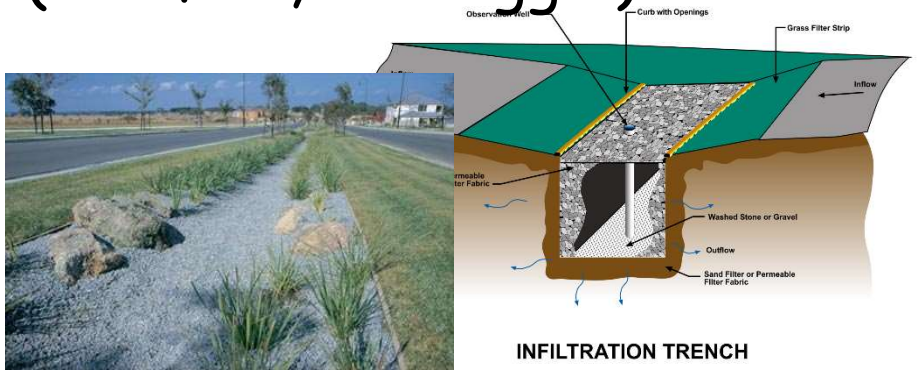
Figure 2-15. Example of a Profile Plot.

SWMM



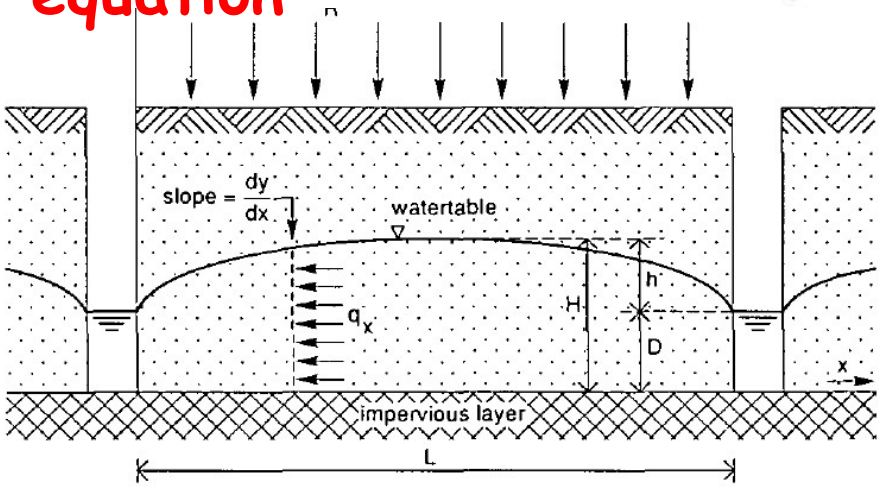
Soil moisture drainage

(bonifica, drenaggio)



INFILTRATION TRENCH

Hooghoudt equation



drenaggio urbano: allontanamento mediante una rete di canali a pelo libero dalla superficie del suolo di acqua di origine meteorica originante scorrimento superficiale (runoff) e recapito ad un corpo idrico o vasca di raccolta

bonifica, drenaggio: allontanamento mediante una rete di canali a pelo libero di acqua proveniente da infiltrazione o risalita capillare e trattenuta nel terreno e recapito ad un corpo idrico o vasca di raccolta

URBANIZZAZIONE:

•Riduce i tempi di corrivazione

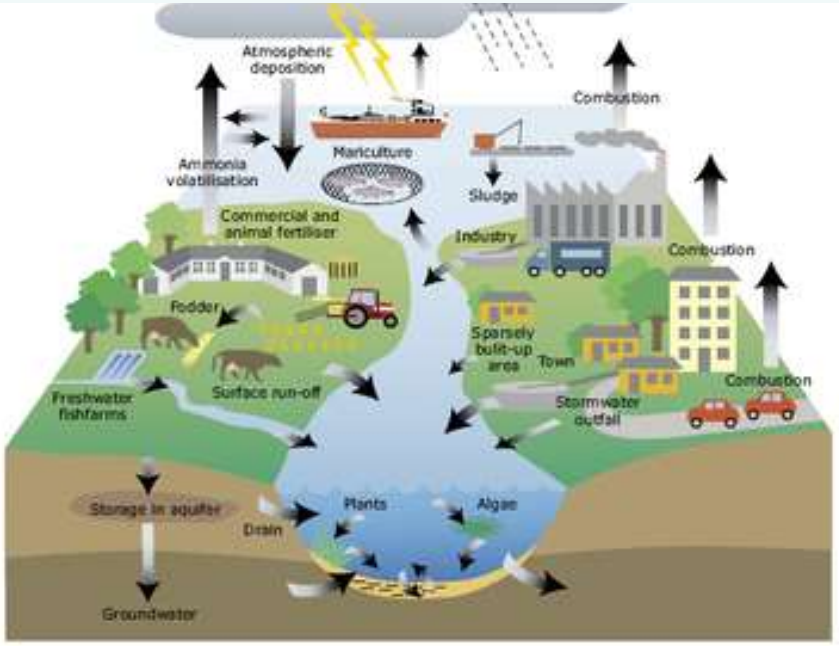
•Aumenta i volumi dei deflussi che giungono alla rete di drenaggio

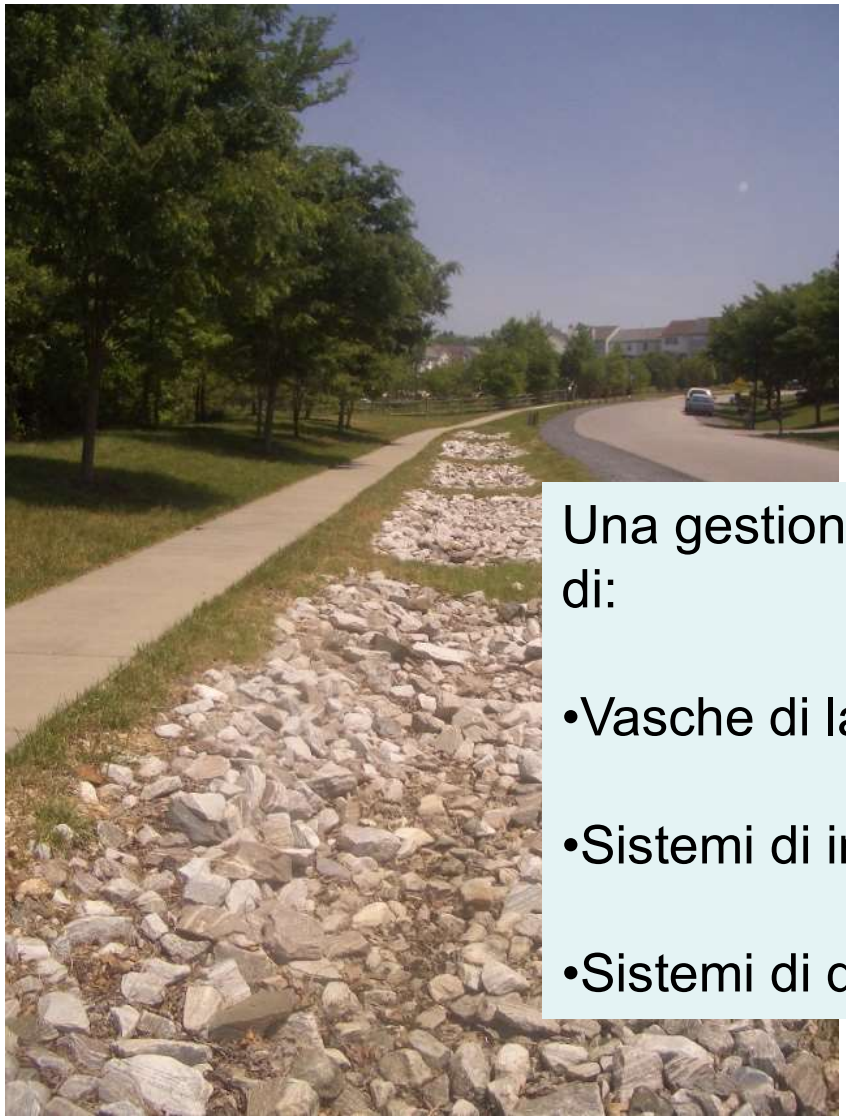
•Riduce i volumi che si infiltrano nel sottosuolo andando ad alimentare le falde ed i corsi d'acqua nei periodi in cui si verifica l'assenza delle precipitazioni

L’urbanizzazione altera anche la qualità dei deflussi aumentando le concentrazioni di inquinanti di natura antropica

•La pioggia dilava le superfici impermeabili dove si accumulano gli inquinanti

•Il suolo che non è più sede di fenomeni di infiltrazione non svolge la sua funzione di filtro





Una gestione sostenibile del drenaggio urbane si avvale di:

•Vasche di laminazione

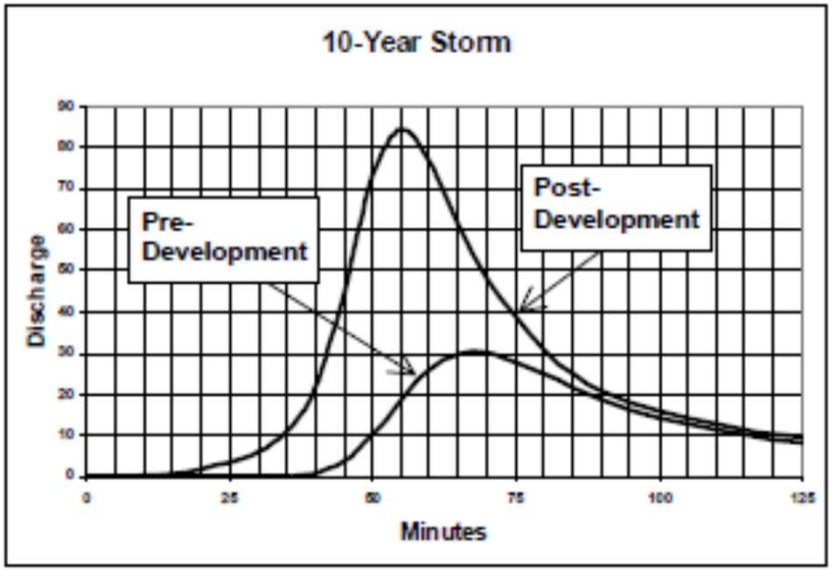
•Sistemi di infiltrazione

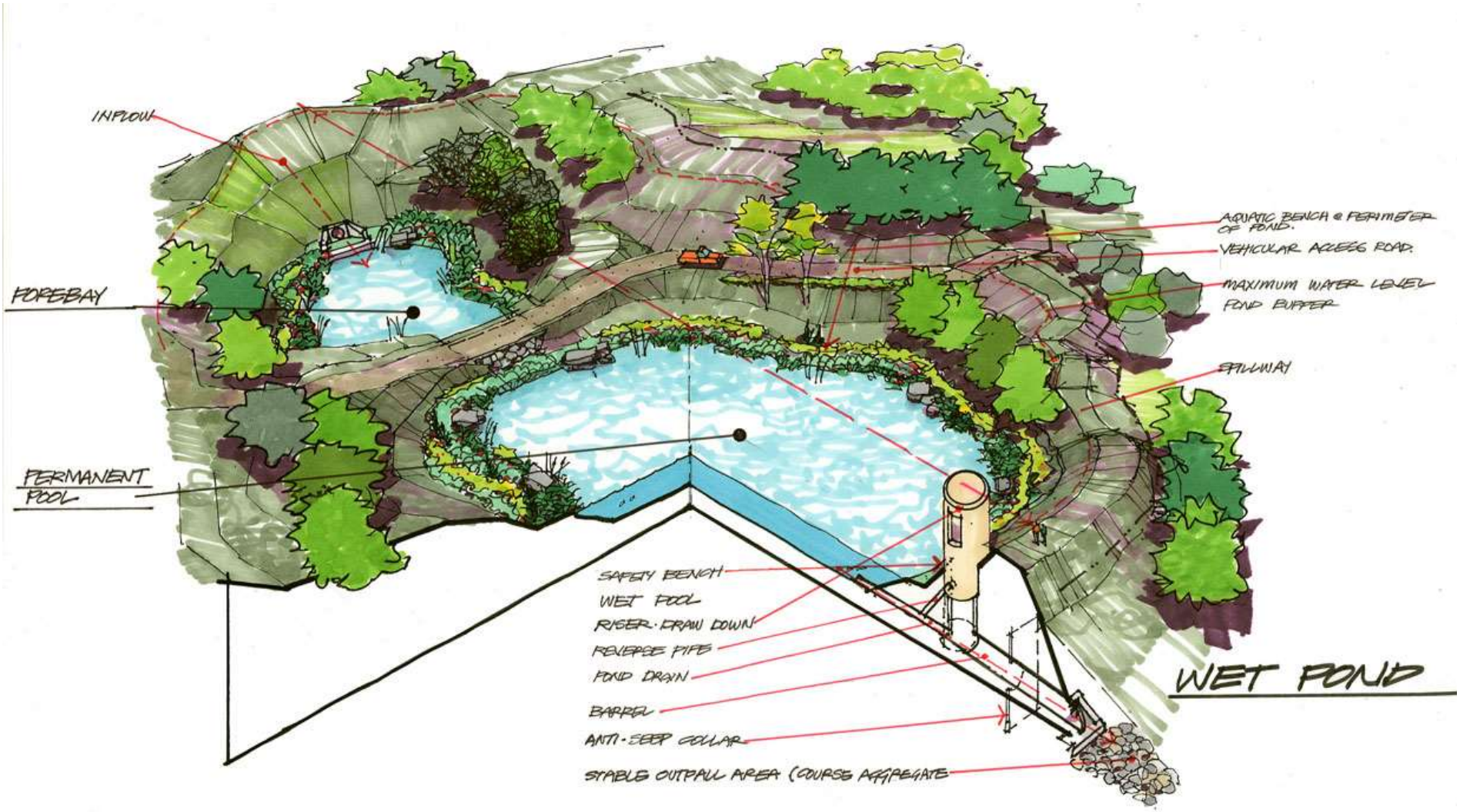
•Sistemi di depurazione

Georgia Stormwater Management Manual

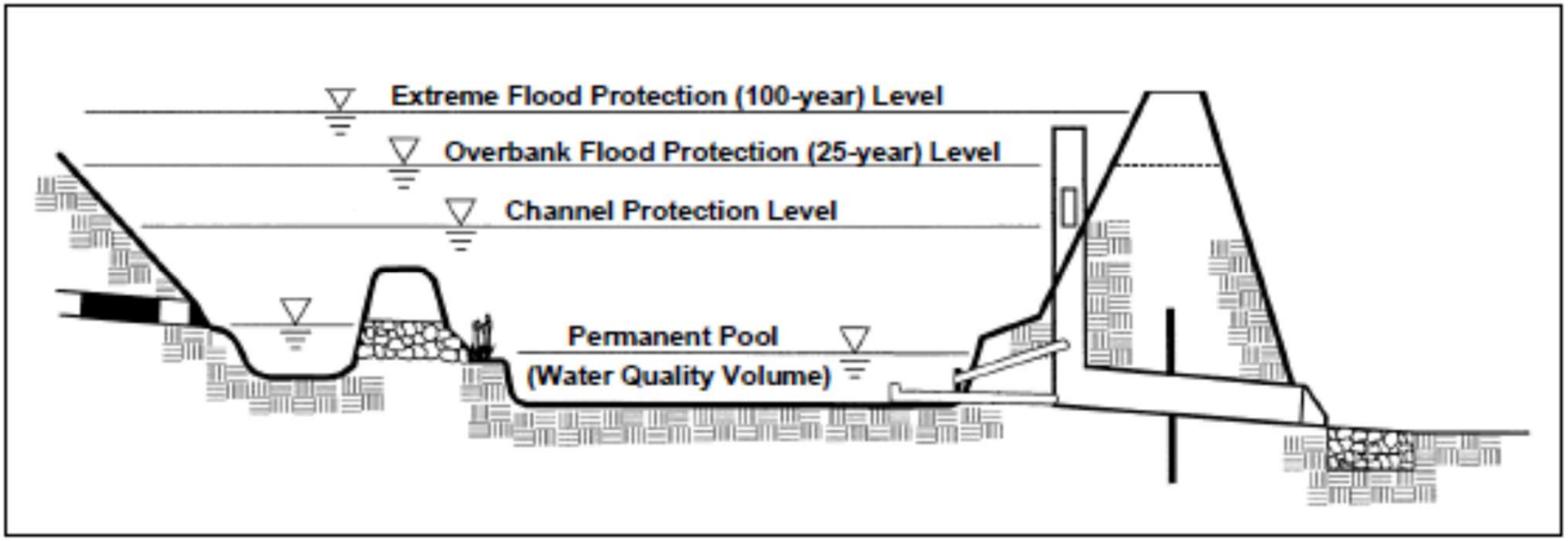
LAND DEVELOPMENT: CHANGES TO STREAM

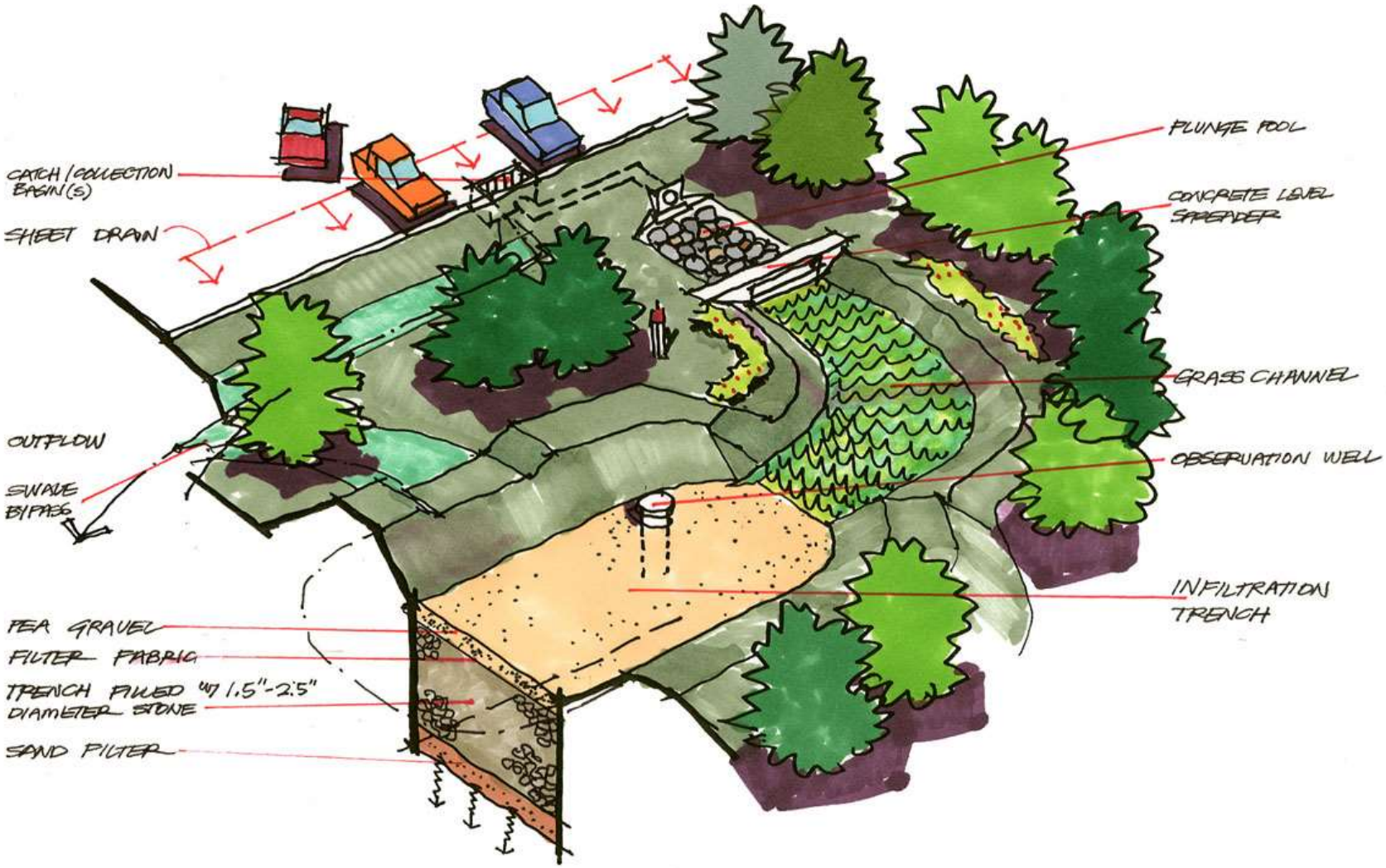
1. Increased Runoff Volumes
2. Increased Peak Runoff Discharges
3. Greater Runoff Velocities and timing
4. Increased Frequency of Bankfull and Near Bankfull Events
5. Increased Flooding
6. Lower Dry Weather Flows (Baseflow)



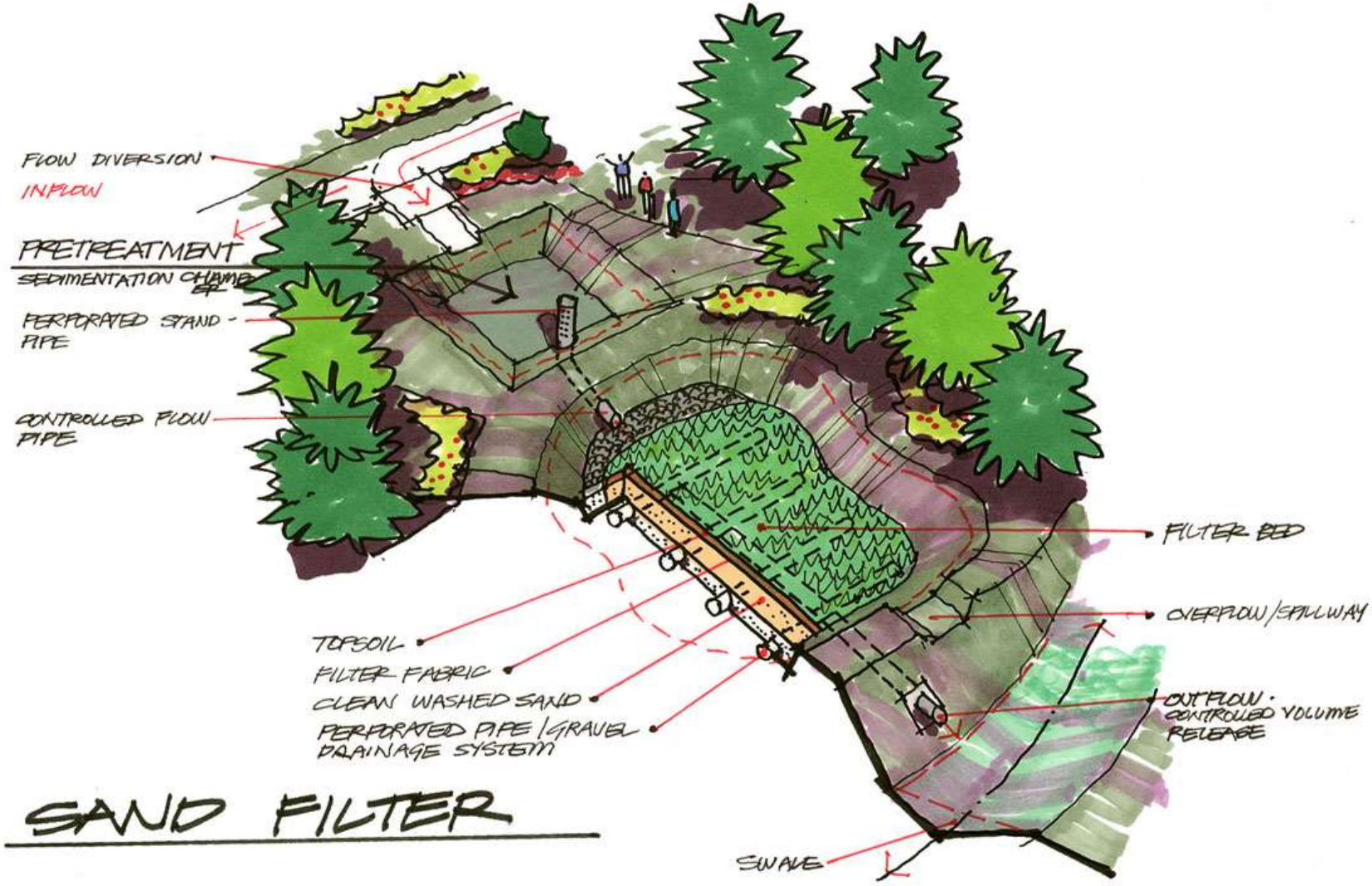

INFLOW
FOREBAY
PERMANENT POOL
AQUATIC BENCH @ PERIMETER OF POND.
VEHICULAR ACCESS ROAD.
MAXIMUM WATER LEVEL POND BUFFER
SPILLWAY
SAFETY BENCH
WET POOL
RISER-DRAW DOWN
REVERSE PIPE
POND DRAIN
BARREL
ANTI-SEEP COLLAR
STABLE OUTFALL AREA (COURSE AGGREGATE
WET POND

Sizing Criteria
Water elevation in a Stormwater Wet Pond





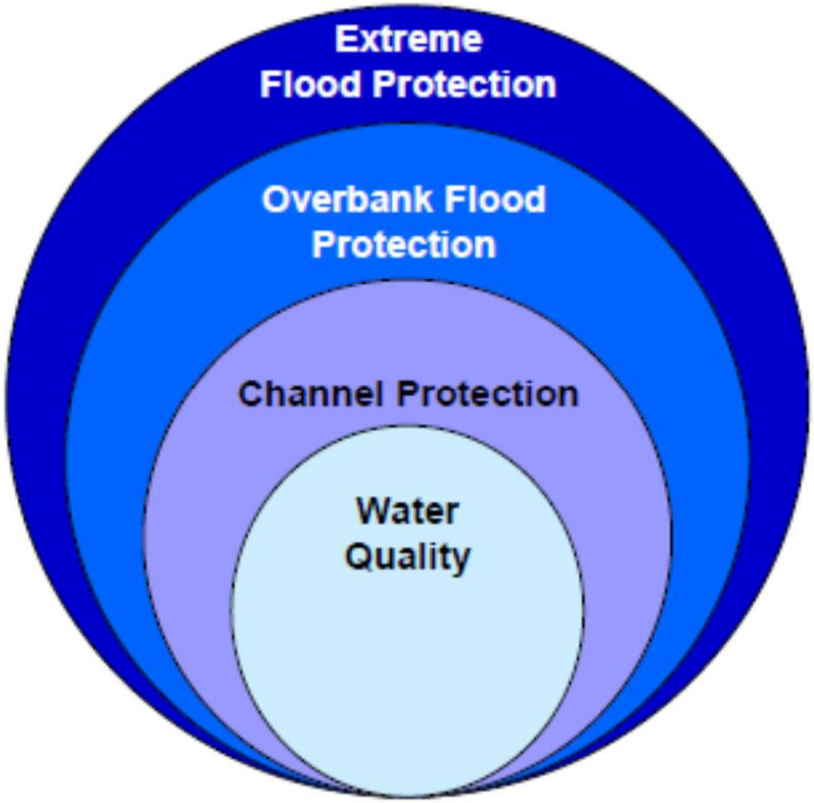
INFILTRATION TRENCH


FLOW DIVERSION
INFLOW
PRETREATMENT
SEDIMENTATION CHAMBER
PERFORATED STAND-PIPE
CONTROLLED FLOW PIPE
FILTER BED
OVERFLOW/SPILLWAY
TOPSOIL
FILTER FABRIC
CLEAN WASHED SAND
PERFORATED PIPE/GRAVEL DRAINAGE SYSTEM
OUTFLOW: CONTROLLED VOLUME RELEASE
SWALE

SAND FILTER

Minimum Stormwater Management Standards

Water Quality
Channel Protection
Overbank Flood Protection
Extreme Flood Protection



Reliability Theories (approcci all'analisi di rischio)

1) Quasi probabilistic methods → safety factors

(metodi quasi probabilistici → fattore di sicurezza)

2) Probabilistic methods → probability distribution of strength and/or load

(metodi probabilistici → distribuzione di probabilità di carico e/o resistenza)

3) Complex probabilistic methods → numerical simulation of random events

(metodi probabilistici complessi → simulazione numerica di eventi aleatori)

Reliability Theories (approcci all'analisi di rischio)

1) Quasi probabilistic methods → safety factors

(metodi quasi probabilistici → fattore di sicurezza)

2) Probabilistic methods → probability distribution of strength and/or load

(metodi probabilistici → distribuzione di probabilità di carico e/o resistenza)

3) Complex probabilistic methods → numerical simulation of random events

(metodi probabilistici complessi → simulazione numerica di eventi aleatori)

Esempio 2

Rischio di fallanza di una rete di drenaggio

Example 2.11. There are two drains from site A to site B, (D_1 and D_2), and two drains from site B to site C, (D_3 and D_4). Each of the four drains has an equal probability P of becoming blocked, independently of the others. What is the probability of there being unblocked drainage from site A to site C?

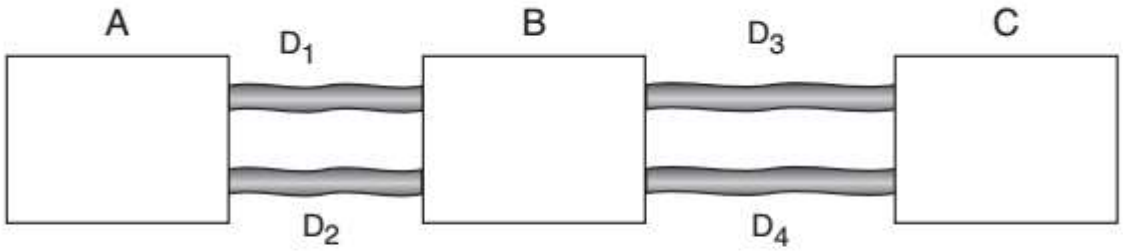


Figure 2.5 Diagram for Example 2.11.

$$
\begin{aligned}
P(\text{unblocked drainage}) &= 1 - P(\text{blocked drain from } A \text{ to } C) \\
&= [1 - P(\text{drains from } A \text{ to } B \text{ blocked})] \times \\
&\quad [1 - P(\text{drains from } B \text{ to } C \text{ blocked})] \\
&= [1 - P(\text{drains from } A \text{ to } B \text{ blocked})]^2 \\
&= [1 - P(\text{drain } D_1 \text{ blocked and drain } D_2 \text{ blocked})]^2 \\
&= [1 - P(\text{drain } D_1 \text{ blocked}) \times P(\text{drain } D_2 \text{ blocked})]^2 \\
&= (1 - p^2)^2
\end{aligned}
$$

Il disastro di Livorno…

Le casse di espansione…
“Lì dentro – dice al *Tirreno* **Stefano Pagliara**, professore di protezione idraulica a Pisa– sono finiti circa 205.000 metri cubi di acqua, tanta ma non sufficiente... Non è bastato perché le 4 casse di espansione sono state realizzate con “tempo di ritorno” di 200 anni…”

“Negli ultimi venti anni – dice la responsabile di Legambiente Livorno **Emidia Baldi** – è stata in buona parte cementificata..
con i canali tombati la manutenzione è quasi impossibile. Una fogna che non prende acqua, un pietrone lungo il canale possono significare disastro oppure no, ma anche vita o morte…La soluzione starebbe nella realizzazione di più corsi d’acqua, per alleggerire la portata. Ma servono molti soldi.”.

“Questo percorso – disse a suo tempo il presidente del consorzio, **Giancarlo Vallesi** – ci consentirà di lavorare per aumentare le attività di manutenzione con l’obiettivo della riduzione del rischio idraulico ..”

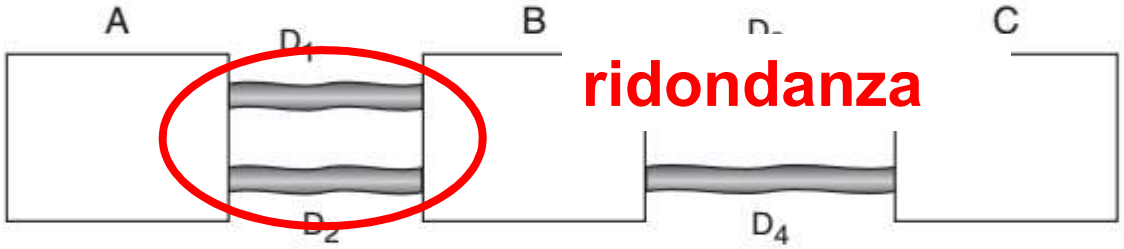
Il disastro di Livorno…

$$
\begin{aligned}
P(\text{unblocked drainage}) &= 1 - P(\text{blocked drain from } A \text{ to } C) \\
&= [1 - P(\text{drains from } A \text{ to } B \text{ blocked})] \times \\
&\quad [1 - P(\text{drains from } B \text{ to } C \text{ blocked})] \\
&= [1 - P(\text{drains from } A \text{ to } B \text{ blocked})]^2 \\
&= [1 - P(\text{drain } D_1 \text{ blocked and drain } D_2 \text{ blocked})]^2 \\
&= [1 - P(\text{drain } D_1 \text{ blocked}) \times P(\text{drain } D_2 \text{ blocked})]^2 \\
&= (1 - p^2)^2
\end{aligned}
$$

Manutenzione → riduzione di P(block)

"Negli ultimi venti anni – dice la responsabile di Legambiente Livorno **Emidia Baldi** – è stata in buona parte cementificata..
con i canali tombati la **manutenzione** è quasi impossibile. Una fogna che non prende acqua, un pietrone lungo il canale possono significare disastro oppure no, ma anche vita o morte…La soluzione starebbe nella realizzazione di **più corsi d'acqua**, per alleggerire la portata. Ma servono molti soldi.".

"Questo
Vallesi -
l'obiettiv
con



ridondanza

Variabili aleatorie, campione di dati, popolazione

Una variabile aleatoria è una grandezza della quale non è possibile prevedere con certezza il valore. Nell'ambito dell'analisi di rischio idraulico, le grandezze in questione sono solitamente: portate o volumi, ma sono di rilevante interesse anche i tempi quali: la durata di un periodo siccitoso, la durata di un evento di pioggia, la durata di un periodo in cui un organo meccanico o elettrico (e.g. una pompa) funziona correttamente ed il tempo necessario a ripararlo quando entra in fallanza.

Se l'opera per la quale viene valutato il rischio idraulico non svolge la sua funzione correttamente quando una o più grandezze aleatorie assumono prestabiliti valori o ricadono in un determinato intervallo di valori, il rischio viene calcolato sulla base della distribuzione di probabilità delle variabili e di un modello che descrive il funzionamento dell'opera.

Le variabili aleatorie al centro dell'analisi di rischio sono: il *carico* (portata, volume, tempo) che identifica l'entità della prestazione richiesta all'opera idraulica, e la sua *resistenza*, che è la capacità che l'opera ha di far fronte al carico.

Solitamente si dispone di un adeguato numero n di osservazioni indipendenti x_i, con $i = 1, 2, ...n$ di una variabile aleatoria x (altezza e durata delle precipitazioni, durata del periodo di tempo secco, portata in una sezione di un corso d'acqua, tempi di riparazione di un organo meccanico) osservata e misurata ripetutamente sempre nelle stesse condizioni, quando si verifica: un **campione** $(x_1, x_2, ...x_n)$.

Si immagina che queste osservazioni siano estratte da una **popolazione** di variabili delle quali esiste una **distribuzione di probabilità**

$p(x; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,)$ che è funzione dei **parametri** $(\theta_1, \theta_2, ...\theta_m,)$. La distribuzione di probabilità della popolazione consente di valutare la probabilità di superamento di un qualsiasi valore di soglia X della variabile, cioè la probabilità che sia $x \geq X$, o la probabilità che la variabile ricada in un prestabilito intervallo $[X_1, X_2]$ di valori, cioè la probabilità che sia $X_1 \leq x \leq X_2$.

La statistica (induttiva) è l'insieme delle teorie e dei metodi che consentono di valutare la probabilità che la variabile x (carico o resistenza) superi un qualsivoglia valore di soglia X, utilizzando i dati x_i, e giungendo a conclusioni quanto più simili a quelle che si sarebbero ottenute se fosse stata nota la popolazione intera, inferendo dal campione alla popolazione attraverso la definizione della sua distribuzione di probabilità.

La popolazione comprende tutti i valori che la variabile x può assumere. Il campione è un sottoinsieme di questi infiniti valori. Ovviamente la popolazione intera non può essere osservata perché comprende gli infiniti valori della variabile che potrebbero verificarsi. Per caratterizzare la distribuzione di probabilità della popolazione, note le sole n osservazioni x_i, si fanno delle ipotesi:

- la forma della distribuzione $p(x; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,)$,
- il metodo da utilizzare per stimarne i parametri $(\theta_1, \theta_2, ...\theta_m,)$della distribuzione.

La probabilità di osservare il campione $(x_1, x_2, ...x_n)$ è

$$
\begin{aligned}
&L(x_1, x_2...x_n; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,) = \\
&p(x_1; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,) \cdot p(x_2; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,) \cdot ...p(x_n; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,) = \\
&\prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

e prende il nome di **funzione di verosimiglianza**. La funzione di verosimiglianza è funzione dei parametri (incogniti) della distribuzione per un campione noto.

2.3 Random variables

A *random variable*, X, is a variable whose value is determined by the result of an experiment involving unpredictable or chance causes. Random variables fall into two categories: discrete and continuous.

2.3.1 *Discrete random variables*

A variable is discrete if the set of all values it may take is countable

In practice, the types of variables encountered in hydraulic and coastal engineering are generally considered to be continuous. However, when they are measured this can only be to a finite accuracy. For analytical manipulation it is much more convenient to work with continuous distributions.

Examples of discrete variables

1 Bernoulli trials: X takes values 0 or 1 with probabilities p and q, respectively. The probability function is $f(0)=p$, $f(1)=q=1-p$. An example is tossing a fair coin where $p=q=1/2$.

2 Binomial distribution: If n independent Bernoulli trials $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are performed and the total number of 1s are counted so that $Y=X_1+X_2+\ldots+X_n$ then the probability function of Y is

$$f(k)={}^nC^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,\ldots,n \tag{2.12}$$

This is sometimes described in shorthand as 'Y is a $B(n, p)$ variable'.

Binomial

$$P(x < k) = \sum_{i=0,k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

the binomial distribution with parameters **k** and **p** is the discrete probability distribution of the number of successes (**k**) in a sequence of **n** *independent* yes/no experiments, if the probability of a success is **p**

For a random variable to have a binomial distribution, the following conditions are necessary:

(1) A series of Bernoulli trials is made, each of which has only one of two possible outcomes: a success or a failure.
(2) The trials are conducted under the same conditions and the probability **p** of a success is constant.
(3) The number of trials **n** is fixed.
(4) The outcomes of the trials are independent.
(5) The random variable **x** is the total number of successes in **n** trials and the order in which the events in the trials occur is immaterial.

If **p** is small and **n** is large, the binomial can be approximated by the Poisson distribution. This distribution is also based on the assumptions of **independence** and **identical distribution**.
Let $\lambda=np$ be the mean or expected number of successes in a series of **n** Bernoulli trials with probability **p**.

$$p(x=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^{k}k!}\lambda^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^{k}}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \qquad \lambda = n\cdot p$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\ldots. \quad 0<z<1$$

Integrating : $$\left(\frac{1}{1-z}\right) = -ln(1-z) = z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots$$

$$d = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$ln(d) = n\,ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda-\frac{\lambda^2}{2n}-\frac{\lambda^3}{3n^2}-\ldots = -\lambda\left(1+ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} ln(d) = -\lambda \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$$

Distribuzione di probabilità geometrica

La distribuzione di probabilità geometrica consente di calcolare la probabilità che dopo $n-1$ osservazioni di un esperimento con esito negativo, all'n-esima osservazione l'esito dell'esperimento sia positivo, sapendo che la probabilità che ciò accada è p.

$$p(x = k) = (1-p)^{k-1}p$$

Distribuzione di probabilità binomiale

La distribuzione di probabilità binomiale consente di calcolare la probabilità che su n osservazioni di uno stesso evento, k osservazioni possiedano un attributo la cui probabilità di verificarsi è p.

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Distribuzione di probabilità di Poisson

Per una popolazione che segue una distribuzione di probabilità binomiale con parametri p e n, il cui valore atteso è pn, si supponga che pur rimanendo costante il prodotto pn, p sia molto piccolo e n molto grande. Al tendere di p a zero, la distribuzione di probabilità binomiale può essere approssimata dalla distribuzione di Poisson. Sia $\lambda = np$

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}$$

La distribuzione di probabilità di Poisson consente di calcolare la probabilità che un evento si verifichi k volte nell'unità di tempo, sapendo che mediamente si verifica λ volte.

$$p(x = k) = \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}$$

2.3.2 *Continuous random variables*

A random variable is continuous if its cumulative distribution function $F(x) = P(X \leq x)$ can be written as

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \tag{2.15}$$

where f is called the *probability density function* of X. This does not define F uniquely; however, if F is differentiable, then it is customary to write

$$f(u) = \frac{dF}{du} \tag{2.16}$$

Examples of continuous variables

1 Uniform or rectangular distribution (Figure 2.11): X is uniformly distributed on the range $[a, b]$ if

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \le a \\ (x-a)/(b-a) & \text{if} \quad a < x \le b \\ 1 & \text{if} \quad x > b \end{cases} \tag{2.17}$$

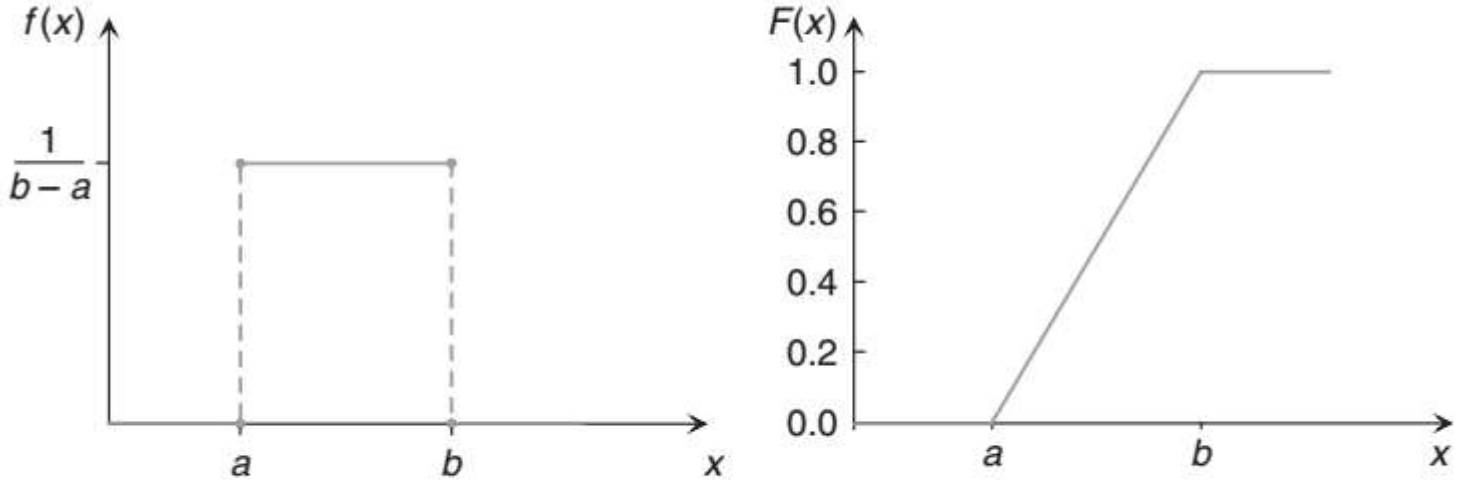
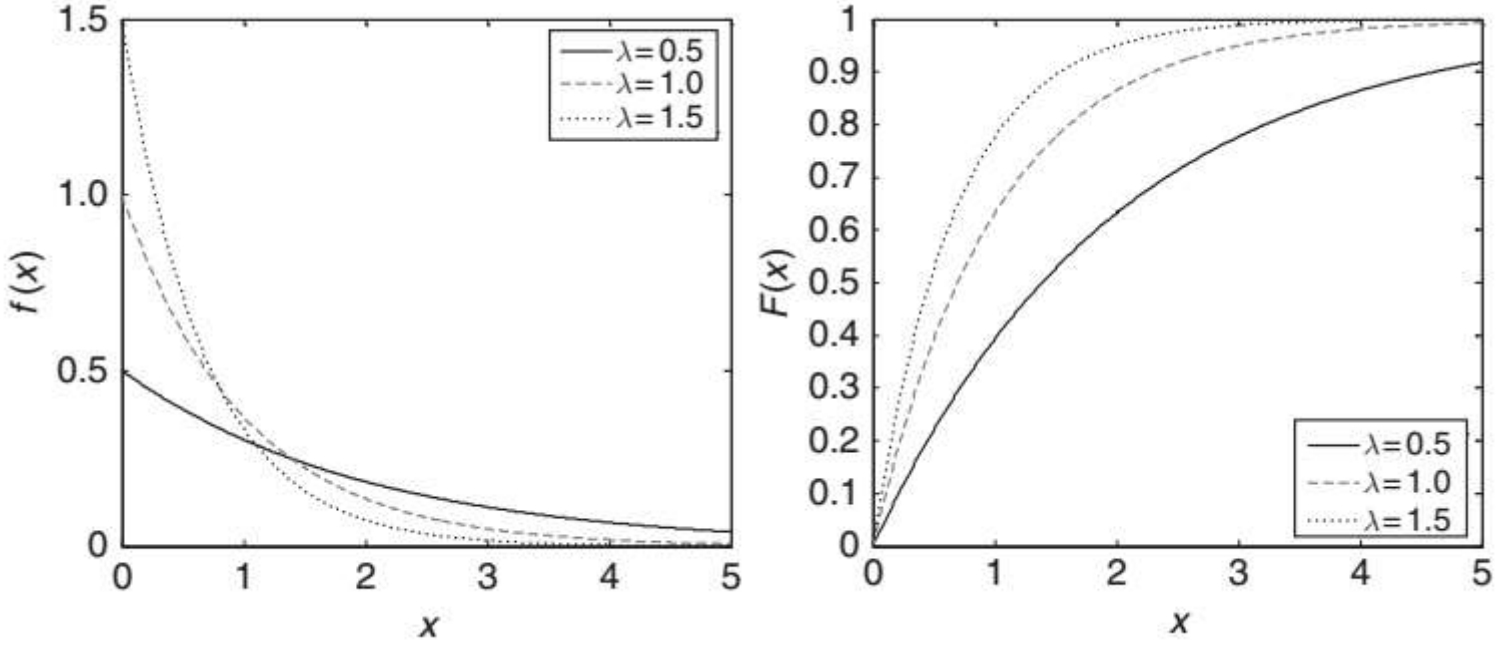


Figure 2.11 Plot of the rectangular or uniform density and distribution functions.

2 Exponential distribution (Figure 2.12): X is exponential with parameter $\lambda(>0)$ if

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}, \qquad x\geq 0 \tag{2.18}$$

This distribution is the continuous version of the waiting time or discrete geometric distribution. It often appears in practice to describe the time elapsing between unforeseeable events such as storms or earthquakes.



distribuzioni di valori estremi

Distribuzione di Gumbel

La distribuzione di Gumbel riproduce asintoticamente il comportamento statistico della coda della distribuzione esponenziale.

$$P(x) = exp\left[-exp\left[-\frac{x-a}{b}\right]\right]$$

Distribuzione di Weibull

La distribuzione di Weibull descrive il comportamento dei minimi di una variabile ed è rappresentata dalla seguente funzione

$$P(x) = 1 - exp\left[-\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)^{\kappa}\right]$$

2.3.3 *Moments of a distribution*

The shape of a distribution may be described quantitatively by its moments. The *mean*, or *expected value* or *first moment* of a random variable is defined as:

$$E(X) \equiv \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \approx \sum_i x_i p_X(x_i) \tag{2.24}$$

The integral expression is for continuous random variables and the summation expression is for discrete ones. The name 'first moment' arises because it is the first moment of 'area' of the probability density function about the origin.

If n is a positive integer, then the nth *central moment*, M_1, of X is

$$M_n = E[(X - M_1)^n] \tag{2.25}$$

The central moments may be written in terms of the ordinary moments. As an example,

$$\begin{aligned} M_2 &= E[(X - m_1)^2] \\ &= E(X^2) - E(2m_1X) + E(m_1^2) \\ &= m_2 - 2m_1E(X) + E(m_1^2) \\ &= m_2 - m_1^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

In passing, it should be noted that variances can *never* be negative.

MOMENTI DEL CAMPIONE E MOMENTI DELLA POPOLAZIONE

	x discreta $x = X_1, X_2 ... X_n$	x continua $-\infty < x < \infty$
momento di ordine 1 (valore atteso μ) $\mu = E[x]$	$\sum_{X_i=X_1,X_n} X_i \; p(X_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x \; p(x)dx$
momento centrale di ordine 2 (varianza $\sigma^2 = m_2$) $\sigma^2 = E(x-\mu)^2 =$ $= E[x^2] - E[x]^2$	$\sum_{X_i=X_1,X_n} (X_i - \mu)^2 \; p(X_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \; p(x)dx$
momento centrale di ordine k $m_k = E(x-\mu)^k =$ $\sum_{r=0}^{k} = \binom{k}{r} \mu_{k-r} \cdot (-\mu)^r$	$\sum_{X_i=X_1}^{X_n} (X_i - \mu)^k \; p(X_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k \; p(x)dx$

Il numero intero non negativo $\binom{k}{r}$ è il coefficiente binomiale $\frac{k!}{(k-r)!\; r!}$.

Nota la distribuzione di probabilità $p(x)$ della variabile x è sempre possibile calcolarne i momenti. Se la $p(x)$ è funzione di un certo numero di parametri $(a, b..)$ dei quali non si conosce il valore, i momenti della distribuzione possono essere calcolati in funzione degli stessi parametri applicando le definizioni riportate in questo paragrafo.

Solitamente si dispone di un adeguato numero n di osservazioni indipendenti x_i, con $i = 1, 2, ...n$ di una variabile aleatoria x (altezza e durata delle precipitazioni, durata del periodo di tempo secco, portata in una sezione di un corso d'acqua, tempi di riparazione di un organo meccanico) osservata e misurata ripetutamente sempre nelle stesse condizioni, quando si verifica: un **campione** $(x_1, x_2, ...x_n)$.

Il **momento di ordine s del campione** è definito come

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^s \quad s = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

ed è una variabile aleatoria (assume un valore diverso per ogni campione osservato) la cui distribuzione di probabilità dipende dalla distribuzione delle variabili del campione $(x_1, x_2, ...x_n)$ e quindi dalla distribuzione della variabile x.

Per la popolazione, il momento di ordine s dovrebbe essere calcolato su un numero infinito di valori: tutti i valori che la x può assumere, perciò non è aleatorio. Il momento di ordine s della popolazione è una variabile deterministica che viene indicata con il simbolo $E[x^s]$ (valore atteso di x^s). Viene formalmente calcolata a mezzo della distribuzione di probabilità:

$$E[x^s] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \cdot p(x; \theta_1, \theta_2, ...\theta_m,)dx \tag{2.3}$$

Le due scritture

$E[x^s]$

e

$\int_{-\infty}^{\infty} x^s \cdot p \, dx$

sono equivalenti.

METODI PROBABILISTICI COMPLESSI

(Basati sulla simulazione numerica di eventi aleatori e sulla modellazione numerica del comportamento di sistemi complessi)

Reliability Theories (approcci all'analisi di rischio)

1) Quasi probabilistic methods → safety factors

(metodi quasi probabilistici → fattore di sicurezza)

2) Probabilistic methods → probability distribution of strength and/or load

(metodi probabilistici → distribuzione di probabilità di carico e/o resistenza)

3) Complex probabilistic methods → numerical simulation of random events

(metodi probabilistici complessi → simulazione numerica di eventi aleatori)

Reliability Theories (approcci all'analisi di rischio)

1) Quasi probabilistic methods → safety factors

(metodi quasi probabilistici → fattore di sicurezza)

2) Probabilistic methods → probability distribution of strength and/or load

(metodi probabilistici → distribuzione di probabilità di carico e/o resistenza)

3) Complex probabilistic methods → numerical simulation of random events

(metodi probabilistici complessi → simulazione numerica di eventi aleatori)

Nell’arco di una stagione piovosa, I giorni in cui è piovuto sono stati

Giorni piovosi = {21, 62, 80, 102, 129, 136, 147, 148, 149, 177, 180, 194, 202, 208, 209, 217, 218, 219}

Qual è la durata media del tempo di secco tra due giorni piovosi?

gg piovosi	gg tra due eventi di pioggia	
12	9	=21-12
21	41	=62-21
62	18	
80	22	
102	10	
112	17	
129	7	
136	11	
147	1	
148	1	
149	28	
177	3	
180	14	
194	8	
202	6	
208	1	
209	8	
217	1	
218	1	
219		
	10,89474	media
	10,62437	varianza

Viene realizzato un piccolo serbatoio ad uso irriguo. Il serbatoio raccoglie le acque scolanti da un bacino impermeabile molto esteso e quindi si può assumere che sia completamente pieno dopo ogni evento di pioggia.
Il serbatoio è dimensionato affinchè le acque in esso immagazzinate possano bastare per irrigare un piccolo terreno agricolo nel tempo medio tra due eventi di pioggia (10gg)

Assumendo che la durata del tempo di secco segua una distribuzione di tipo esponenziale, qual è il rischio che l'acqua immagazzinata nel serbatoio non basti a soddisfare la domanda agricola perche' il tempo di secco è t > 10gg?

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 10g \Longrightarrow \lambda = 0.1g^{-1}$$

$$P[t \geq 10] = \int_{10}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda \cdot 10} = 0.37$$

In realtà, il serbatoio potrebbe essere pieno a metà prima di un periodo di tempo secco di 8-9 giorni, dando luogo a fallanza a causa di un evento di precipitazione scarsa, anche se il period di tempo secco successive non è lungo…

Reliability Theories (approcci all'analisi di rischio)

1) Quasi probabilistic methods → safety factors

(metodi quasi probabilistici → fattore di sicurezza)

2) Probabilistic methods → probability distribution of strength and/or load

(metodi probabilistici → distribuzione di probabilità di carico e/o resistenza)

3) Complex probabilistic methods → numerical simulation of random events

(metodi probabilistici complessi → simulazione numerica di eventi aleatori)

2.3.6 *Numerical generation of random variables*

It is reasonable to ask: 'How do you go about actually creating a sequence of random numbers or random variables?'. We start by considering how to generate random numbers that lie uniformly in the interval [0, 1], and then discuss how these can be used to generate random variables with other distributions.

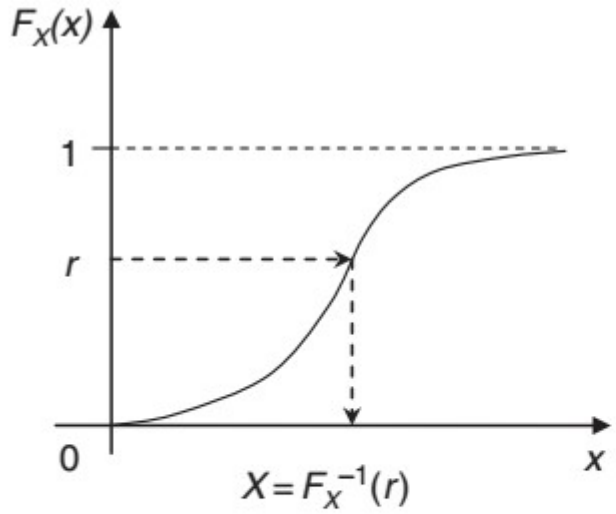


Figure 2.17 Illustration of the 'inverse transformation' technique for generating random numbers with a specified distribution. Uniformly distributed random numbers r, lying between 0 and 1, are generated and then converted to variates with distribution F_X through inverse transformation.

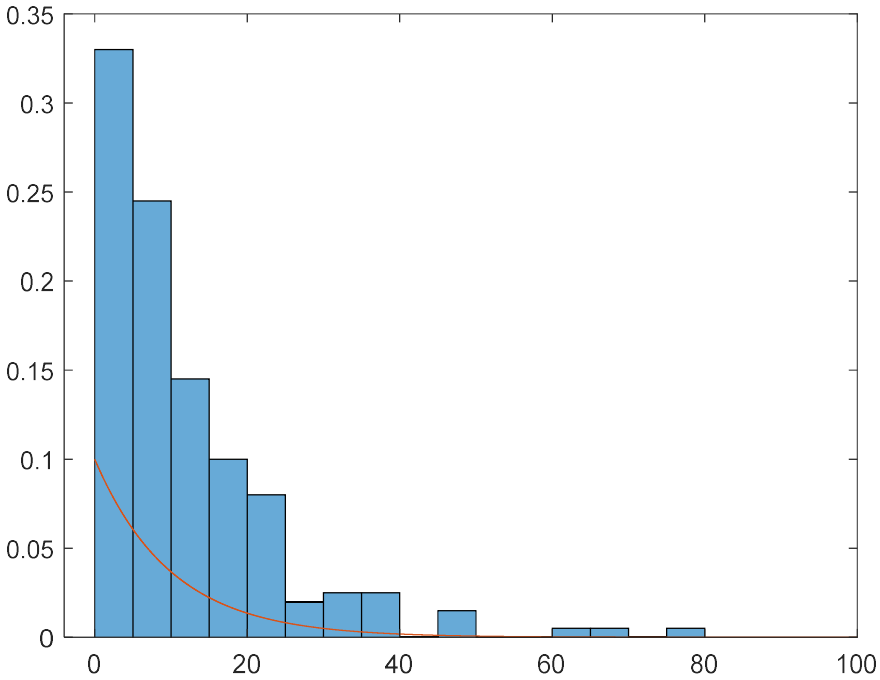
Example 2.18. Find the inverse transform function for the exponential distribution.

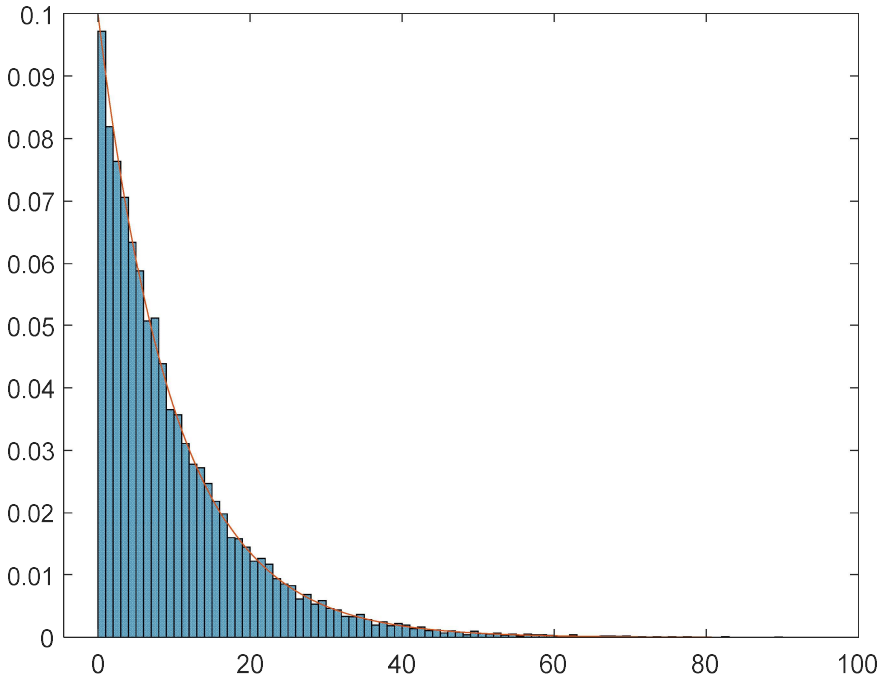
Solution. We set the random number $r = F(x)$ and solve for x:

$$
\begin{aligned}
& F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \\
\therefore \quad & r = 1 - e^{-\lambda x} \\
\therefore \quad & 1 - r = e^{-\lambda x} \\
\therefore \quad & \ln(1 - r) = -\lambda x \\
\therefore \quad & x = -\frac{\ln(1 - r)}{\lambda}
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

```
clear all
lambda=1/10;
N=200;
for i=1:N
x(i)=-log(1-rand)/lambda;
end
```

```
histogram(x,'Normalization','probability')
hold on
x1=(0.01:0.01:100);
plot(x1,lambda*exp(-x1*lambda))
C=find(x>1/lambda);
R=size(C,2)/N;
```

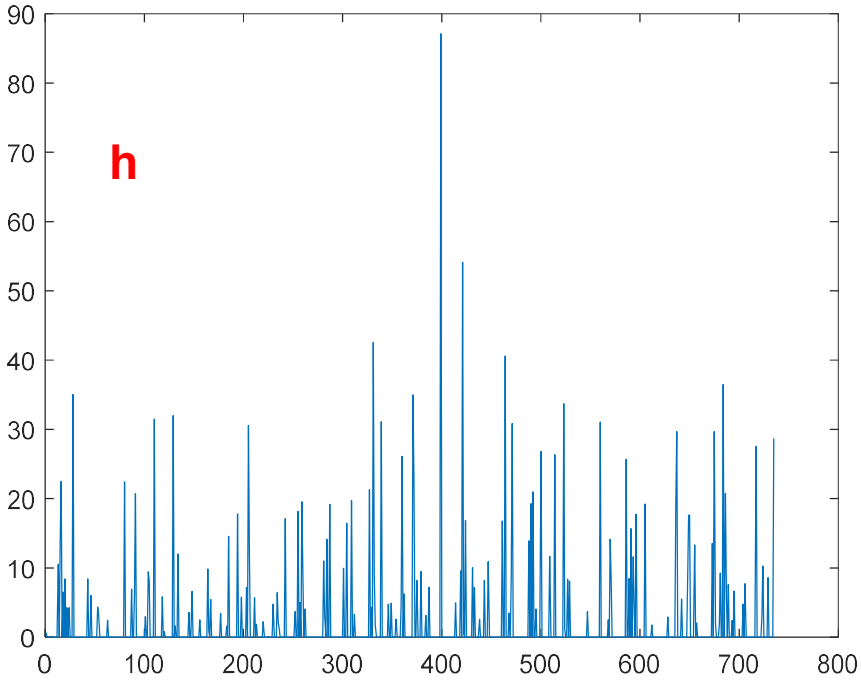




N=200
R=(numero gg>media)/N=0.4

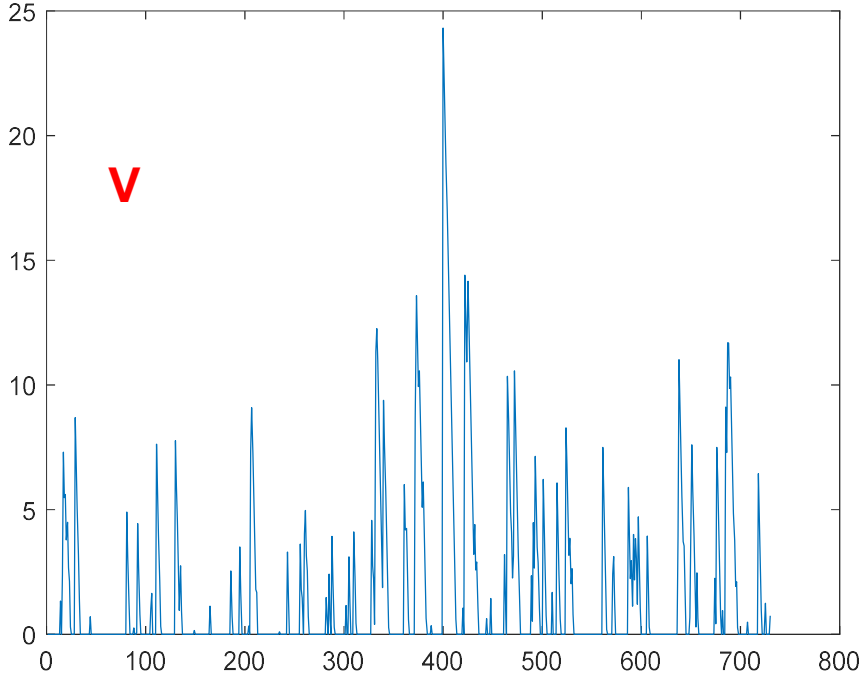
N=20000
R=0.368

P(t>10)=0.37



$h(t_1)SC \rightarrow V_{in}(t_1)$

$V(t_2)=V(t_1)+Vin(t_1)-Q(t_{2-}t_1)$



Metodi probabilistici complessi

1. Viene **generata numericamente una lunga serie di altezze di precipitazione** giornaliere h_i

2. Si **risolve l'equazione di bilancio dei serbatoi** ottenendo lo stato di riempimento del serbatoio al termine di ogn igiorno

$$V_{i+1}=V_i-Q(t_{i+1}-t_i)+h_iS$$

Al tempo t_i, il volume immagazzinato nel serbatoio è V_i,
Entra il volume h_iS, con S=superficie di raccolta della precipitazione h_i
Esce $Q(t_{i+1}-t_i)$, con Q portata utilizzata nell'intervallo di tempo $t_{i+1}-t_i$

3. **Il rischio è stimato** come il rapporto tra il numero di giorni in cui $V_{i+1}\leq 0$ ed il numero di giorni di simulazione

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{T} t_i(V_i \leq 0)}{T}$$

RISCHIO IDRAULICO DI ELEMENTI RIPARABILI

2.4 Reliability and hazard functions

We conclude this chapter with a short section on some *functions* of probability density and cumulative distribution functions. These appear sufficiently frequently in some reliability problems that they have been defined in their own right. The first is the *survival function*, which, for a random variable, X, is defined as:

$$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) \qquad (2.38)$$

x=strength

This terminology has arisen because if X is considered to be the strength of an object subjected to loading, then the survival function is simply the probability that the strength of the object is greater than the imposed load,

The *hazard function*, $h(x)$, is the probability of failure given that no failures have occurred so far:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.39)$$

x=time to failure

The hazard function is also termed the *failure rate* or *hazard rate*. It is most often encountered in problems concerning time variation (x replaced by t in Equation 2.39), with the interpretation that the hazard function is the probability that failure occurs for $t \leq T \leq t + \delta t$ given that there have been no failures for $t \leq T$.

The cumulative or integrated hazard function is the integral of the hazard function:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)du = -\ln[1 - F(x)] = -\ln[G(x)] \qquad (2.40)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{dF}{1 - F(x)} = -ln\left[1 - F(x)\right]\Big|_{-\infty}^{x} = -ln\left[1 - F(x)\right]$$

Example 2.20. Find the reliability, hazard and integrated hazard function for the exponential distribution.

Solution. For the exponential distribution we have $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ and $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Thus $G(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$; $h(x) = \lambda$; and $H(x) = -\log(e^{-\lambda x}) = \lambda x$.

A flexible form of hazard function is:

$$h(t) = \alpha \mu^{-\alpha} t^{\alpha - 1} \tag{2.41}$$

where α, $\mu > 0$ are shape and location parameters. $\alpha < 1$ gives a decreasing hazard, $\alpha = 1$ gives a constant hazard and $\alpha = 2$ gives a linearly increasing hazard. We can work out the probability density and cumulative distribution functions for this hazard function. From Equation (2.40) we have:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u)du = -\ln[1 - F(t)]$$

$$\therefore\ 1 - F(t) = e^{-\int h(t)dt} = e^{-\alpha\mu^{-\alpha}\int t^{\alpha-1}dt} = e^{-(\frac{t}{\mu})^{\alpha}}$$

$$\therefore\ F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\mu}^{\alpha}} \tag{2.42}$$

$$\therefore\ f(t) = \frac{d}{dt}[F(t)] = \alpha\mu^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-(\frac{t}{\mu})^{\alpha}}$$

This particular distribution is well known and is called the two-parameter *Weibull distribution*. Note that for $\alpha = 1$ it reduces to the exponential distribution with mean μ, and for $\alpha = 2$ it reduces to the Rayleigh distribution.

Associated with the concept of reliability is the mean time to failure, (MTTF), illustrated in Figure 2.18. The reliability is the probability of no failures over a stated time interval. Suppose a single item is characterised by the distribution function $F(t) = P(\tau \leq t)$ of its failure-free operating time, τ. Its reliability function, $G(t)$, is given by

$$G(t) = P[\text{no failure in}(0, t)] = 1 - F(t) \tag{2.43}$$

The MTTF can be computed from Equation (2.24), as

$$MTTF = \int_0^\infty t f(t) dt$$

$$MTTF = \int_0^\infty tf(t)dt$$

$$= [tF(t)]_0^\infty - \int_0^\infty F(t)dt \qquad (2.44)$$

$$= [t(1 - G(t))]_0^\infty - \int_0^\infty (1 - G(t))dt$$

$$= [t(1 - G(t)) - t]_0^\infty + \int_0^\infty G(t)dt$$

$$= [tG(t)]_0^\infty + \int_0^\infty G(t)dt$$

$$= \int_0^\infty G(t)dt$$

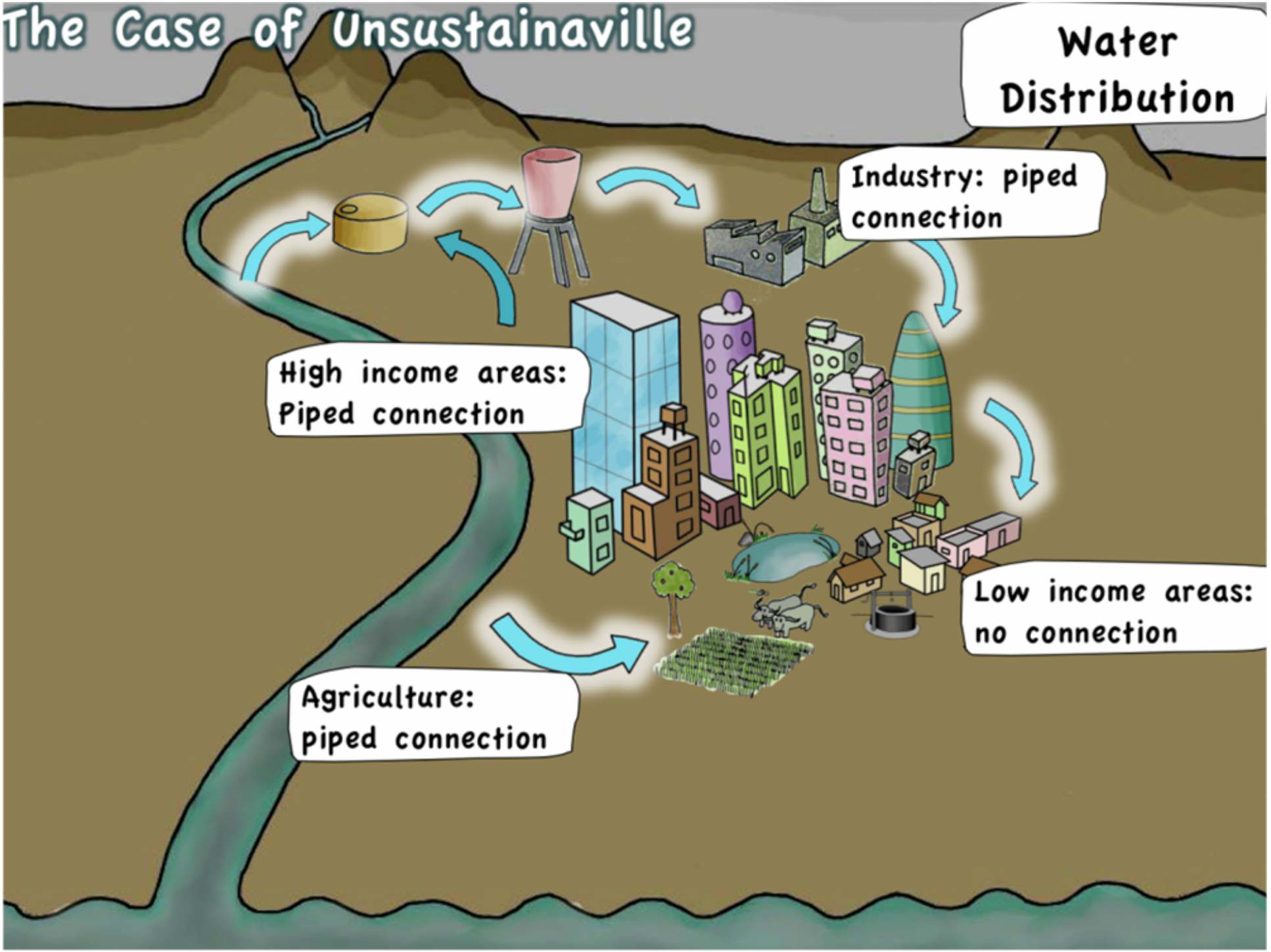
$$f = \lambda e^{-\lambda t}$$

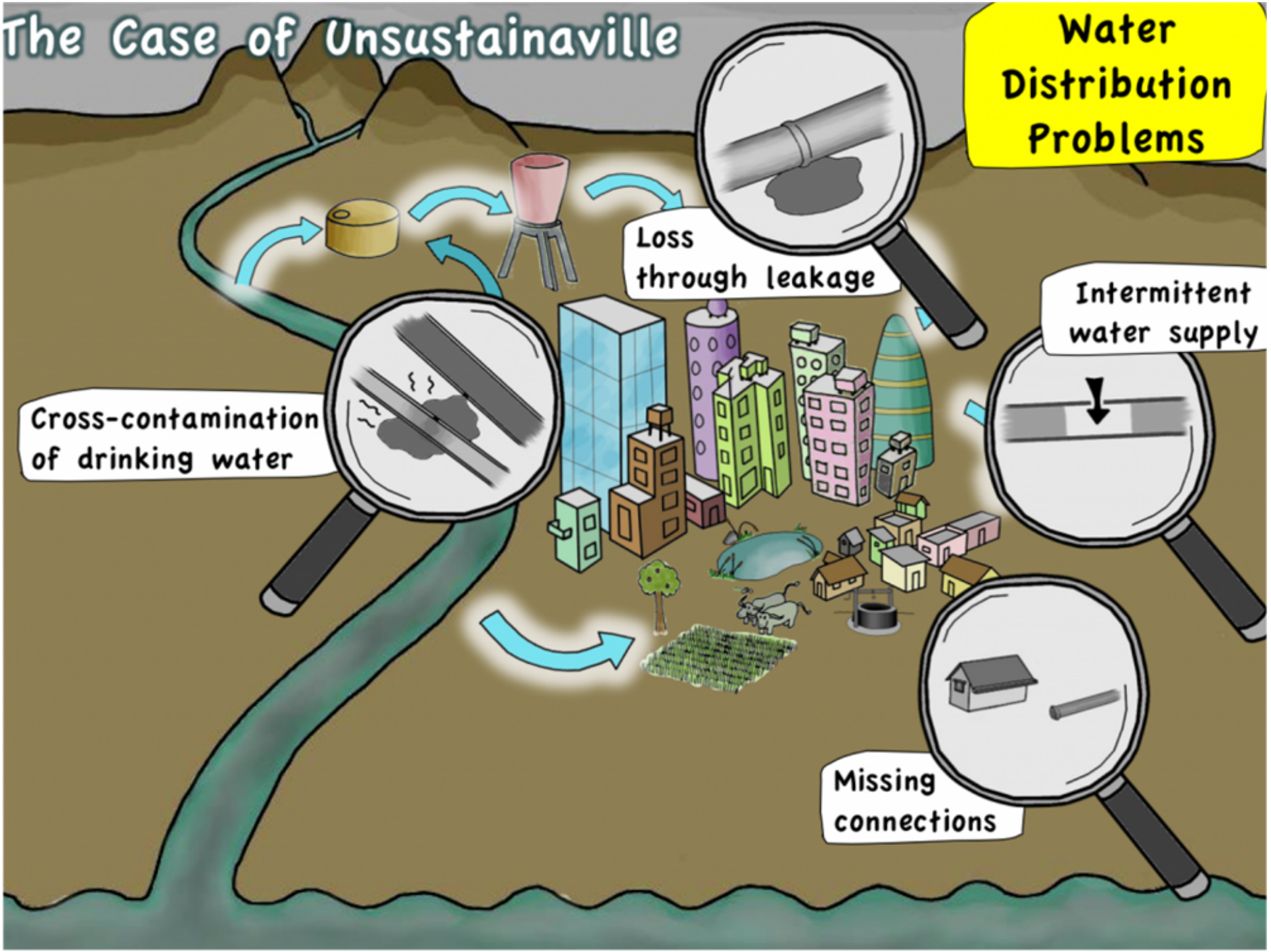
$$G = e^{-\lambda t}$$

$$\int_0^\infty G dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}$$

Esempio di applicazione:

Tempo medio di rottura e riparazione delle reti acquedottistiche

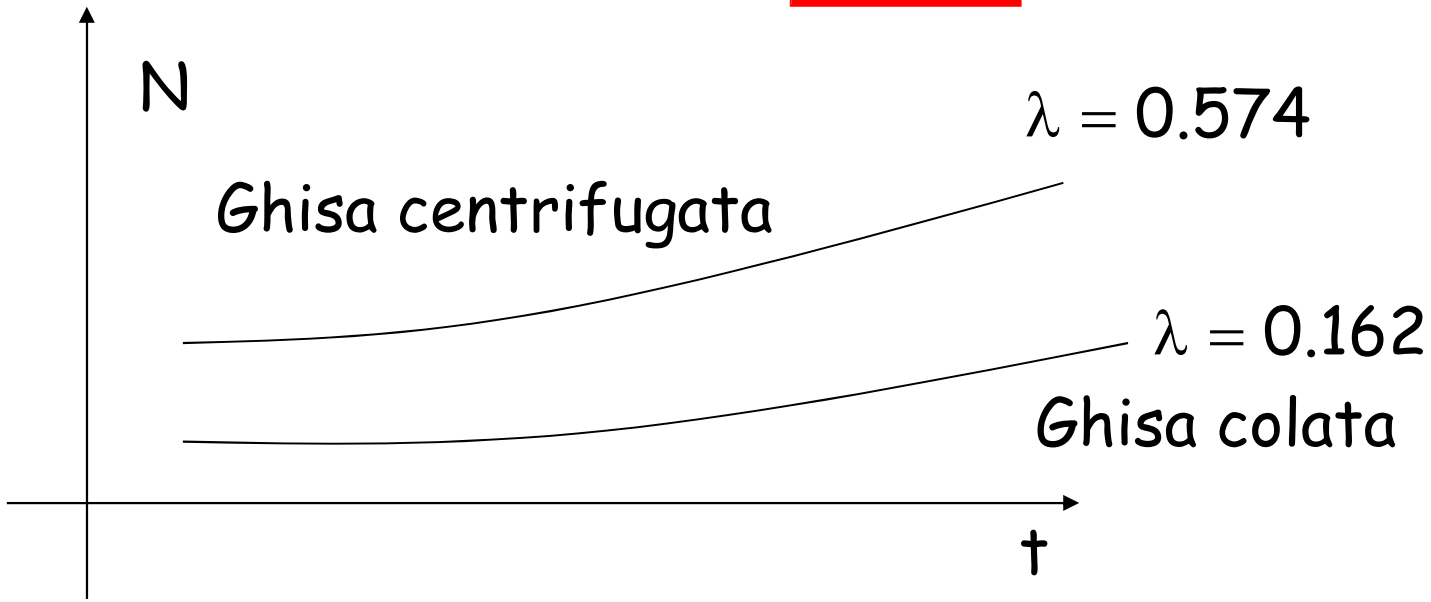

The Case of Unsustainaville
Water Distribution
Industry: piped connection
High income areas: Piped connection
Low income areas: no connection
Agriculture: piped connection


The Case of Unsustainaville
Water Distribution Problems
Loss through leakage
Intermittent water supply
Cross-contamination of drinking water
Missing connections

TASSO DI ROTTURA
(UNA DEFINIZIONE BASATA SULL' OSSERVAZIONE DEL FUNZIONAMENTO DELLE RETI)

N.ro di rotture/(anno)(miglio)

$$\lambda = \frac{dN}{dt}$$



Dati: [US Army Corp of Eng.]

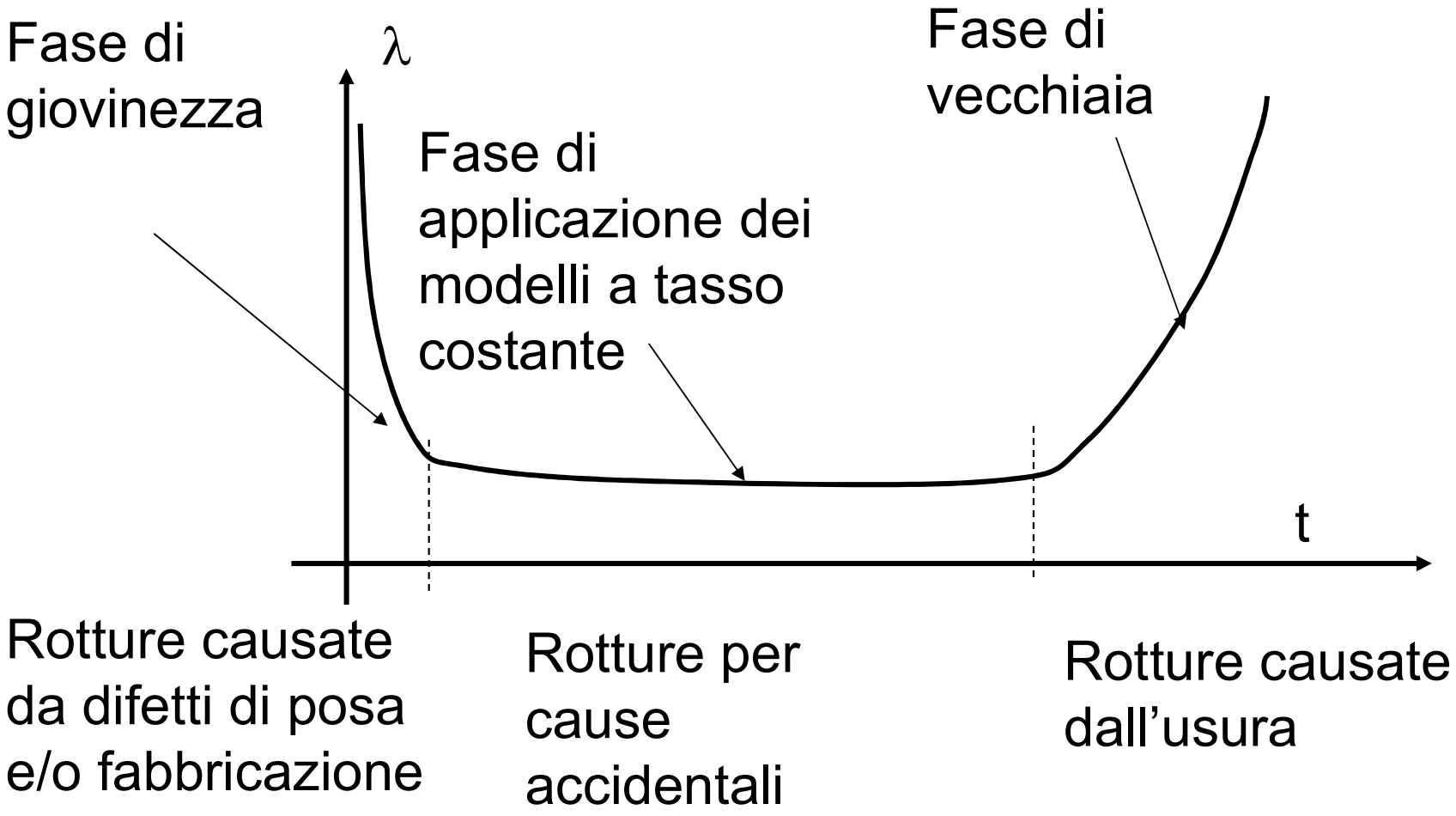
CONDIZIONI PER AVERE UN TASSO DI ROTTURA COSTANTE

L'età del tubo non influenza il tasso di crescita del numero di rotture,

...per cui l'età della condotta non costituisce una causa in sé di rottura, ma piuttosto la misura del tempo di esposizione a diverse cause accidentali di fallanza:

natura terreni, presenza di una falda, carichi esterni, temperatura, acque trasportate, condizioni di esercizio che inducono sollecitazioni non previste

MODELLI A TASSO DI ROTTURA COSTANTE



DEFINIZIONI

Disponibilità: probabilità di un corretto funzionamento nell'intervallo di tempo [0,t]

Affidabilità: probabilità di un corretto funzionamento al tempo t

Nei modelli a tasso costante, la disponibilità diminuisce con il tempo, l'affidabilità tende ad un limite costante

UN ESPERIMENTO…

Al tempo $t_0 = 0$ entrino in funzione N_0 elementi nuovi (si trascuri la loro fase di giovinezza)
Al tempo t, se ne trovino:
N_f in fallanza e
N_s ancora in funzione.

Definizione: FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA

$$G = \frac{N_s(t)}{N_0} = \frac{1 - N_f}{N_0}$$

Sulla base dei dati, si possono stimare:

Probabilità cumulata di fallanza, nell'intervallo [0,t]

$$F = \frac{N_f}{N_0}$$

Probabilità cumulata di funzionamento (→ disponibilità)

$$G = \frac{N_s}{N_0}$$

Che era stata più correttamente definita funzione di sopravvivenza

G+F=1

Densità di probabilità di fallanza

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{N_0}\frac{dN_f}{dt} = f$$

Tasso di fallanza

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.39)$$

x=time to failure

G+F=1

$$\lambda = \frac{1}{G}\frac{dF}{dt} = \frac{f}{G} = \frac{N_0}{N_s}\frac{dN_f}{dt}\frac{1}{N_0} = \frac{1}{N_s}\frac{dN_f}{dt}$$

$$\frac{f}{H} = \frac{d(1-H)}{dt}\frac{1}{H} = -\frac{dH}{dt}\frac{1}{H} = \lambda$$

$$\Rightarrow H = exp\left[\int_0^t \lambda(t)\,dt\right]$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u)du = -\ln[1 - F(t)]$$

$$\therefore\ 1 - F(t) = e^{-\int h(t)dt}$$

Tasso di fallanza costante

$H = \text{P di funzionamento nell'intervallo } [0, t] = e^{-\lambda t}$

$f \cdot dt = P \text{ di fallanza in } [t, t + dt] = \lambda e^{-\lambda t}$

$\lambda dt = \dfrac{f dt}{H} = P \text{ di fallanza in } [t, t + dt]$

condizionata al funzionamento fino al tempo t

Tempo medio di fallanza

$$\int_0^{\infty} t\ f dt = \int_0^{\infty} t\ \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}$$

Tempo medio di fallanza

$$\int_0^\infty t\ f\mathrm{dt} = \int_0^\infty t\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} = \frac{1}{\lambda}$$

dettagli

$$\int_0^\infty t\ f\mathrm{dt} = \int_0^\infty t\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}$$

$$d\left(t\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \left[\mathrm{e}^{-\lambda t} - t\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\right] dt$$

$$\int_0^\infty t\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} dt - \int_0^\infty d\left[t\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\right] =$$

$$-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_0^\infty - t\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

ELEMENTI RIPARABILI:
TEMPO MEDIO DI FALLANZA E DI RIPARAZIONE

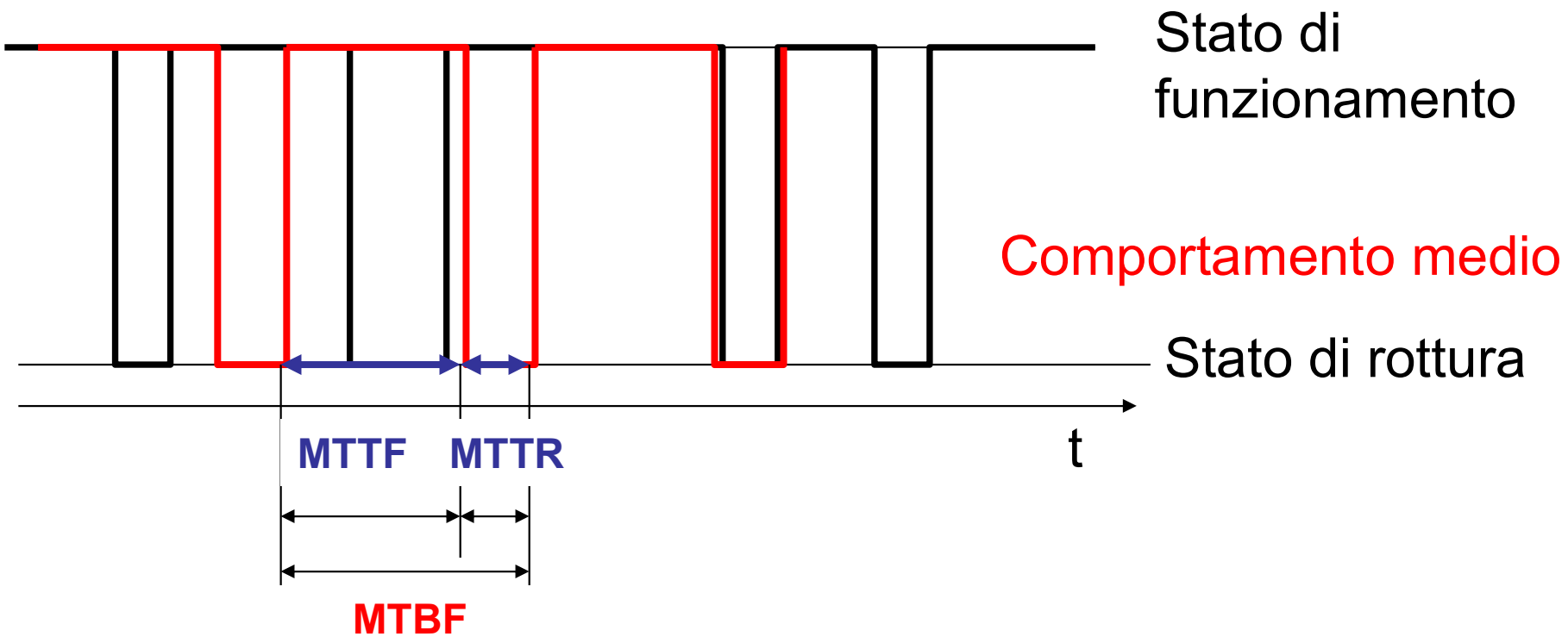
$$\frac{1}{\lambda} = MTTF$$

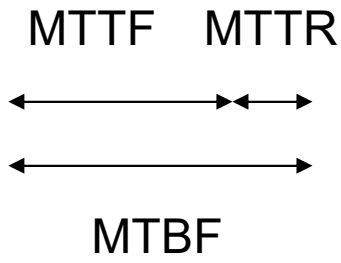
Analogamente, a quamto fatto per le rotture, si definiscono una probabilità condizionata di riparazione: g(t), un tasso di riparazione ed un tempo medio di riparazione:

$$g = \mu e^{-\mu t}$$

$$\frac{1}{\mu} = MTTR$$

UNA RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DELL'ALTERNANZA DI ROTTURE E RIPARAZIONI





$$a = affidabilità = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$1 - a = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

a = probabilità di trovare l'elemento in uno stato di funzionamento

1-a = probabilità di trovare l'elemento in uno stato di fallanza (probabilità complementaread a)