

1 Ripasso

Esercizio 1.1. Risolvi le seguenti disequazioni:

(a) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \leq 0$

(b) $\frac{||x| - 1|}{|x + 2|} > 1$

(c) $\log(2x + 1) \geq \log(x^2 - 2x - 3)$

(d) $\sqrt{x^2 - x - 2} < x + 1$

(e) $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$

Soluzione.

(a) Il numeratore si fattorizza come $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, il denominatore si annulla in $x = 2$ (che va escluso). Studio il segno di $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.

Per $x \leq 1$ ho che $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ e $x - 2 \leq 0$. Dunque $f(x) \leq 0$. Per $1 < x \leq 2$, $f(x) > 0$. Per $2 < x \leq 3$, $f(x) \leq 0$ e infine $f(x) > 0$ se $x > 3$. Dunque troviamo:

$$I = (-\infty, 1] \cup (2, 3].$$

(b) Condizione di esistenza: $x \neq -2$. Poiché $|x + 2| > 0$, la disequazione è equivalente a

$$||x| - 1| > |x + 2|.$$

Entrambi i membri sono non negativi, quindi posso elevare al quadrato senza cambiare il verso:

$$(|x| - 1)^2 > (x + 2)^2.$$

- **Caso $x \geq 0$.** Allora $|x| = x$ e $(x - 1)^2 > (x + 2)^2 \iff x^2 - 2x + 1 > x^2 + 4x + 4 \iff -6x > 3 \iff x < -\frac{1}{2}$. Intersecando con $x \geq 0$ non si trova nessuna soluzione.
- **Caso $x < 0$.** Allora $|x| = -x$ e $(-x - 1)^2 = (x + 1)^2 > (x + 2)^2 \iff x^2 + 2x + 1 > x^2 + 4x + 4 \iff -2x > 3 \iff x < -\frac{3}{2}$. Questa condizione implica già $x < 0$.

Escludendo $x = -2$:

$$\text{SOL} = (-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{3}{2}).$$

(c) Condizioni di esistenza.

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < -1 \vee x > 3 \end{cases} \iff x > 3.$$

Poiché $\log$ è strettamente crescente, la disequazione è equivalente a

$$2x + 1 \geq x^2 - 2x - 3 \iff x^2 - 4x - 4 \leq 0 \iff 2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 2 + 2\sqrt{2}.$$

Intersecando con il campo di esistenza $x > 3$ ($2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83$):

$$\text{SOL} = (3, 2 + 2\sqrt{2}].$$

(d) *Condizione di esistenza:* $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \geq 0 \iff x \leq -1 \vee x \geq 2$.

Il primo membro è ≥ 0 , quindi la disequazione può essere vera solo se $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$. Unendo con il campo di esistenza si ottiene $x \geq 2$. In questo caso entrambi i membri sono non negativi e posso elevare al quadrato:

$$x^2 - x - 2 < x^2 + 2x + 1 \iff -3 < 3x \iff x > -1,$$

che è verificata per ogni $x \geq 2$. Quindi

$$\text{SOL} = [2, +\infty).$$

(e) Pongo $t = e^x > 0$. La disequazione diventa $t^2 - 3t + 2 < 0$, cioè $(t - 1)(t - 2) < 0 \iff 1 < t < 2$. Tornando alla variabile x (e usando che $\exp$ è strettamente crescente):

$$1 < e^x < 2 \iff 0 < x < \log 2 \quad \Rightarrow \quad \text{SOL} = (0, \log 2).$$

2 Principio di induzione

Esercizio 2.1. Dimostra per induzione che per ogni $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, vale $2^n \geq n^2$.

Soluzione.

Passo base. $n = 4$: $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Vero.

Ipotesi induttiva. Supponiamo $2^n \geq n^2$ per un certo $n \geq 4$.

Passo induttivo. Vogliamo mostrare $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Si ha

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2.$$

Resta da verificare che $2n^2 \geq (n+1)^2$:

$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0 \iff (n-1)^2 \geq 2,$$

che è vera per ogni $n \geq 4$ (anzi per ogni $n \geq 3$) perché $(n-1)^2 \geq 9$. Dunque

$$2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Per il principio di induzione la tesi vale per ogni $n \geq 4$.

Esercizio 2.2. Dimostra per induzione, $\forall n \geq 1$:

$$(a) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Soluzione.

(a) Passo base. $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1$ e $\left(\frac{1+2}{2}\right)^2 = 1$.

Passo induttivo. Assumendo la formula per n ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1) \right] = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2,\end{aligned}$$

che è la formula per $n+1$.

(b) Passo base. $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Passo induttivo. Assumendo la formula per n ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

che è la formula per $n+1$.

Esercizio 2.3. Dimostra che il numero $3^{2n+2} - 8n - 9$ è divisibile per 64 $\forall n \geq 0$.

Soluzione.

Passo base. $n = 0$: $3^2 - 0 - 9 = 0 = 64 \cdot 0$, divisibile per 64.

Passo induttivo. Per ipotesi esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $3^{2n+2} - 8n - 9 = 64k$, cioè

$$3^{2n+2} = 64k + 8n + 9.$$

Allora

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9 &= 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 \\ &= 9(64k + 8n + 9) - 8n - 17 \\ &= 576k + 72n + 81 - 8n - 17 \\ &= 576k + 64n + 64 = 64(9k + n + 1),\end{aligned}$$

con $9k + n + 1 \in \mathbb{Z}$. Quindi il numero è divisibile per 64 anche al passo $n+1$.

Esercizio 2.4 (Disuguaglianza di Bernoulli). Dimostra che, per ogni $x \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dove si usa l'ipotesi $x \geq -1$?

Soluzione.

Passo base. $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$.

Ipotesi induttiva. $(1+x)^n \geq 1+nx$ per un certo $n \geq 0$.

Passo induttivo. Moltiplico entrambi i membri dell'ipotesi induttiva per $1 + x$. Questa operazione conserva il verso della disuguaglianza *solo se* $1 + x \geq 0$: è qui che si usa l'ipotesi $x \geq -1$. Si ottiene

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

che è la tesi per $n+1$.

Osservazione. Per $x < -1$ la disuguaglianza può essere falsa: con $x = -3$ e $n = 5$ si ha $(1+x)^5 = -32$, mentre $1+5x = -14$, e $-32 \geq -14$ è falso.

3 Estremo superiore / inferiore

Esercizio 3.1. Sia A un insieme e $p \in A$ un suo elemento. Dimostra che se p è il minimo di A , allora p è anche l'estremo inferiore di A .

Soluzione.

Ipotesi: $p = \min A$, cioè $p \in A$ e $p \leq x$ per ogni $x \in A$.

Tesi: $p = \inf A$, cioè p è il *massimo dei minoranti* di A .

Dim.

- p è un minorante di A , per ipotesi ($p \leq x \forall x \in A$).
- Sia y un minorante qualsiasi di A , cioè $y \leq x \forall x \in A$. Poiché $p \in A$, in particolare $y \leq p$.

Dunque p è un minorante e ogni altro minorante è $\leq p$: p è il più grande dei minoranti, cioè $p = \inf A$.

Esercizio 3.2. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti e limitati. Dimostra che:

- $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- posto $-A = \{-x : x \in A\}$, vale $\inf(-A) = -\sup A$

Soluzione.

(a) Sia $s = \max\{\sup A, \sup B\}$. Mostro che s è il minimo dei maggioranti di $A \cup B$.

- s è un maggiorante. Se $x \in A$ allora $x \leq \sup A \leq s$; se $x \in B$ allora $x \leq \sup B \leq s$. Quindi $x \leq s$ per ogni $x \in A \cup B$.
- s è il più piccolo. Sia M un maggiorante di $A \cup B$. Allora M è maggiorante sia di A sia di B , quindi $M \geq \sup A$ e $M \geq \sup B$, cioè $M \geq s$.

Dunque $s = \sup(A \cup B)$.

(b) Sia $s = \sup A$ (esiste perché A è non vuoto e limitato). Mostro che $-s$ è il massimo dei minoranti di $-A$.

- $-s$ è un minorante di $-A$. Se $x \in A$ allora $x \leq s$, dunque $-x \geq -s$.

- È il più grande. Sia m un minorante di $-A$: $m \leq -x$ per ogni $x \in A$, cioè $-m \geq x$ per ogni $x \in A$. Allora $-m$ è un maggiorante di A , quindi $-m \geq s$, cioè $m \leq -s$.

Dunque $\inf(-A) = -s = -\sup A$.

Esercizio 3.3. Trova gli estremi superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se si tratta rispettivamente del massimo o del minimo:

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$
- (b) $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- (c) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$

Soluzione.

(a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) < 0 \iff 1 < x < 2$, quindi l'insieme è $]1, 2[$.

$$\sup = 2, \quad \inf = 1;$$

nessuno dei due appartiene all'insieme, quindi *non esistono né massimo né minimo*.

(b) Si ha $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (con $n = 0, 1, 2, \dots$), cioè l'insieme è $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$. La successione è strettamente crescente.

- *Inf*: il primo elemento è 0 e tutti gli altri sono più grandi, quindi $\inf = \min = 0$.
- *Sup*: $\frac{n}{n+1} < 1$ per ogni n , quindi 1 è un maggiorante. Sia $\varepsilon > 0$: $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, e un tale n esiste. Quindi nessun numero < 1 è maggiorante: $\sup = 1$. Non è raggiunto, quindi *non esiste il massimo*.

(c) Separo gli indici pari e dispari.

- n pari: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, che per $n = 2, 4, 6, \dots$ vale $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \dots$ (decrecente, tende a 1).
- n dispari: $a_n = -1 + \frac{1}{n}$, che per $n = 1, 3, 5, \dots$ vale $0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \dots$ (decrecente, tende a -1).

Sup. Il termine più grande tra i pari è $a_2 = \frac{3}{2}$, tra i dispari è $a_1 = 0$. Quindi $\sup = \max = \frac{3}{2}$.

Inf. Ogni $a_n > -1$ (per n dispari perché $\frac{1}{n} > 0$, per n pari perché $a_n > 1$), quindi -1 è un minorante. Preso $\varepsilon > 0$, per n dispari con $n > \frac{1}{\varepsilon}$ si ha $a_n < -1 + \varepsilon$: nessun numero > -1 è minorante. Dunque $\inf = -1$, non raggiunto: *non esiste il minimo*.

(d) Considero l'insieme come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Gli elementi sono i razionali in $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

- $\sqrt{3}$ è un maggiorante. Inoltre, se $y < \sqrt{3}$, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ con $\max\{y, 0\} < q < \sqrt{3}$; allora $q^2 < 3$ e $q > y$, quindi y non è un maggiorante. Dunque $\sup = \sqrt{3}$.
- Per simmetria ($A = -A$) e per il punto (b) dell'esercizio precedente, $\inf = -\sup = -\sqrt{3}$.

Poiché $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, essi non appartengono all'insieme: *non esistono né massimo né minimo*. (Visto come sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, l'insieme è limitato ma non ha estremo superiore né inferiore in $\mathbb{Q}$.)

4 Numeri complessi

Esercizio 4.1. Scrivi in notazione di Eulero i seguenti numeri complessi:

- (a) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$
- (b) $\frac{i(2+i)}{(1-i)^3}$
- (c) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

Soluzione.

(a) Scrivo numeratore e denominatore in forma esponenziale:

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}, \quad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Quindi

$$z = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{12}\pi}.$$

Verifica algebrica. $z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2}$, di modulo $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$.

(b) Numeratore: $i(2+i) = 2i-1 = -1+2i$. Denominatore: $(1-i)^2 = -2i$, quindi $(1-i)^3 = -2i(1-i) = -2i-2 = -2-2i$. Allora

$$z = \frac{-1+2i}{-2-2i} = \frac{(-1+2i)(-2+2i)}{(-2-2i)(-2+2i)} = \frac{-2-6i}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i.$$

- Modulo: $|z| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.
- Fase: $\cos \theta = \frac{-1/4}{\sqrt{10}/4} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. Seno e coseno sono entrambi negativi (terzo quadrante) e $\tan \theta = 3$, quindi $\theta = \pi + \arctan 3$.

$$z = \frac{\sqrt{10}}{4} e^{i(\pi+\arctan 3)}.$$

(c) Conviene passare subito alla forma esponenziale: $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$. Allora

$$\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{5}{12}\pi},$$

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 e^{-i\frac{30}{12}\pi} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{5}{2}\pi} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (= -\frac{i}{8}).$$

Esercizio 4.2. Risolvi le seguenti equazioni in campo complesso:

- (a) $z^3 = |z|^2$
- (b) $z^2 \bar{z} = 8i$
- (c) $3z^2 = |z|^3 + 2|z|$

$$(d) \frac{z^2}{z^2 - 1} = 1 + i$$

Soluzione.

(a) Passo ai moduli: $|z|^3 = |z|^2 \iff |z|^2(|z| - 1) = 0 \iff |z| = 0 \vee |z| = 1$.

- $|z| = 0$: $z = 0$ è soluzione ($0 = 0$).
- $|z| = 1$: sostituisco $z = e^{i\theta}$ e ottengo $e^{3i\theta} = 1$, cioè $3\theta = 2k\pi$, $\theta = \frac{2}{3}k\pi$, $k = 0, 1, 2$.

Le soluzioni sono

$$z = 0, \quad z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2}{3}\pi}, \quad z_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

(b) Sostituisco $z = re^{i\theta}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$:

$$(re^{i\theta})^2(re^{-i\theta}) = 8e^{i\pi/2} \Rightarrow \boxed{r^3e^{i\theta} = 8e^{i\pi/2}}$$

Eguaglio moduli e fasi:

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(per θ vale solo $k = 0$, a meno di multipli di 2π .) L'unica soluzione è $z = 2e^{i\pi/2} = 2i$. Verifica: $(2i)^2 \cdot (-2i) = (-4)(-2i) = 8i$.

(c) Il membro di destra, $|z|^3 + 2|z|$, è un numero reale ≥ 0 .

- $z = 0$ è soluzione.
- Se $z \neq 0$ il membro destro è reale e strettamente positivo, quindi lo è anche $3z^2 = 3r^2e^{2i\theta}$: dunque $e^{2i\theta} = 1$, cioè $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ (z reale). Uguagliando i moduli:

$$3r^2 = r^3 + 2r \iff r(r^2 - 3r + 2) = 0 \iff r(r - 1)(r - 2) = 0,$$

e con $r > 0$ si trovano $r = 1$ e $r = 2$.

Le soluzioni sono

$$z \in \{0, 1, -1, 2, -2\}.$$

Verifica: per $z = \pm 2$, $3 \cdot 4 = 12 = 8 + 4$; per $z = \pm 1$, $3 = 1 + 2$.

(d) **C.E.:** $z^2 \neq 1$, cioè $z \neq \pm 1$. Moltiplico per $z^2 - 1$:

$$z^2 = (1 + i)(z^2 - 1) \iff z^2 = (1 + i)z^2 - (1 + i) \iff iz^2 = 1 + i \iff z^2 = \frac{1 + i}{i} = 1 - i.$$

Scrivo $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ e pongo $z = re^{i\theta}$:

$$\begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k = 0, 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}, \quad z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7}{8}\pi},$$

entrambe accettabili perché hanno modulo $\sqrt[4]{2} \neq 1$ e quindi sono diverse da ± 1 .

Esercizio 4.3. Determina tutte le soluzioni complesse dell'equazione seguente. Poi disegna nel piano complesso.

$$(z - 1)^6 = -64$$

Soluzione.

Pongo $w = z - 1$. Allora $w^6 = -64 = 64e^{i\pi}$. Con $w = \rho e^{i\varphi}$:

$$\begin{cases} \rho^6 = 64 \\ 6\varphi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \quad k = 0, \dots, 5 \end{cases}$$

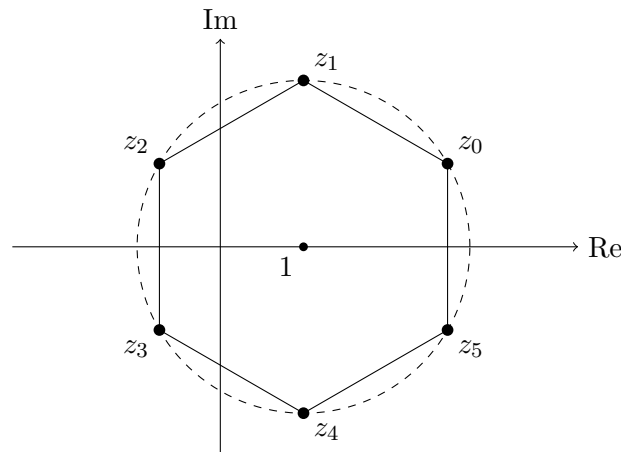
Le soluzioni in w sono $w_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k)}$, cioè

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{3} + i, & w_1 &= 2i, & w_2 &= -\sqrt{3} + i, \\ w_3 &= -\sqrt{3} - i, & w_4 &= -2i, & w_5 &= \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Tornando a $z = w + 1$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 + \sqrt{3} + i, & z_1 &= 1 + 2i, & z_2 &= 1 - \sqrt{3} + i, \\ z_3 &= 1 - \sqrt{3} - i, & z_4 &= 1 - 2i, & z_5 &= 1 + \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono i vertici di un esagono regolare inscritto nella circonferenza di centro 1 e raggio 2.



Esercizio 4.4. Determina tutte le soluzioni dell'equazione seguente:

$$\left(\frac{z+i}{2} - 1\right)^3 = -i$$

Soluzione.

Pongo $w = \frac{z+i}{2} - 1$, quindi $w^3 = -i = e^{-i\pi/2}$. Con $w = \rho e^{i\varphi}$:

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

cioè

$$w_0 = e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad w_1 = e^{i\pi/2} = i, \quad w_2 = e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Ricavo z da $w = \frac{z+i}{2} - 1$: $z = 2(w+1) - i = 2w + 2 - i$. Quindi

$$z_0 = 2 + \sqrt{3} - 2i, \quad z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 2 - \sqrt{3} - 2i.$$

Verifica per z_1 : $\frac{2+i+i}{2} - 1 = i$ e $i^3 = -i$.

Esercizio 4.5. Sia $\omega = e^{2\pi i/n}$ con $n \geq 2$.

- (a) Verifica che le radici di $z^n = 1$ sono $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.
- (b) Usando la formula $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$, dimostra che la somma delle radici n -esime dell'unità è nulla.
- (c) Calcola il prodotto delle radici n -esime dell'unità.

Soluzione.

(a) Risolvo $z^n = 1 = e^{i0}$ con $z = re^{i\theta}$: $r^n = 1$ e $n\theta = 2k\pi$, quindi $r = 1$ e $\theta = \frac{2\pi}{n}k$, $k = 0, \dots, n-1$. Dunque le radici sono

$$e^{i\frac{2\pi}{n}k} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega^k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Sono n numeri distinti (hanno fasi distinte in $[0, 2\pi[$), quanti il grado dell'equazione.

(b) Poiché $n \geq 2$, $\omega \neq 1$, quindi la formula è applicabile. Inoltre $\omega^n = e^{2\pi i} = 1$. Allora

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0.$$

(c)

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{0+1+\dots+(n-1)} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}.$$
