

1 Ripasso

Esercizio 1.1. Risolvi le seguenti disequazioni:

- (a) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \leq 0$
- (b) $\frac{||x| - 1|}{|x + 2|} > 1$
- (c) $\ln(2x + 1) \geq \ln(x^2 - 2x - 3)$
- (d) $\sqrt{x^2 - x - 2} < x + 1$
- (e) $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$

2 Principio di induzione

Esercizio 2.1. Dimostra per induzione che per ogni $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, vale $2^n \geq n^2$.

Esercizio 2.2. Dimostra per induzione, $\forall n \geq 1$:

- (a) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- (b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Esercizio 2.3. Dimostra che il numero $3^{2n+2} - 8n - 9$ è divisibile per 64 $\forall n \geq 0$.

Esercizio 2.4 (Disuguaglianza di Bernoulli). Dimostra che, per ogni $x \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dove si usa l'ipotesi $x \geq -1$?

3 Estremo superiore / inferiore

Esercizio 3.1. Sia A un insieme e $p \in A$ un suo elemento. Dimostra che se p è il minimo di A , allora p è anche l'estremo inferiore di A .

Esercizio 3.2. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti e limitati. Dimostra che:

- (a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- (b) posto $-A = \{-x : x \in A\}$, vale $\inf(-A) = -\sup A$

Esercizio 3.3. Trova gli estremi superiore e inferiore dei seguenti insiemi, specificando se si tratta rispettivamente del massimo o del minimo:

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$
- (b) $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- (c) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$

4 Numeri complessi

Esercizio 4.1. Scrivi in notazione di Eulero i seguenti numeri complessi:

(a) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$

(b) $\frac{i(2 + i)}{(1 - i)^3}$

(c) $\left(\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}\right)^6$

Esercizio 4.2. Risolvi le seguenti equazioni in campo complesso:

(a) $z^3 = |z|^2$

(b) $z^2 \bar{z} = 8i$

(c) $3z^2 = |z|^3 + 2|z|$

(d) $\frac{z^2}{z^2 - 1} = 1 + i$

Esercizio 4.3. Determina tutte le soluzioni complesse dell'equazione seguente. Poi disegna nel piano complesso.

$$(z - 1)^6 = -64$$

Esercizio 4.4. Determina tutte le soluzioni dell'equazione seguente:

$$\left(\frac{z + i}{2} - 1\right)^3 = -i$$

Esercizio 4.5. Sia $\omega = e^{2\pi i/n}$ con $n \geq 2$.

- (a) Verifica che le radici di $z^n = 1$ sono $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$, queste sono dette "radici n -esime dell'unità".
- (b) Usando la formula $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$, dimostra che la somma delle radici n -esime dell'unità è nulla.
- (c) Calcola il prodotto delle radici n -esime dell'unità.