Serie Storiche
Le medie mobili

Corso di Laurea in Statistica per le Tecnologie e le Scienze
Corso di Laurea in Statistica per l'Economia e l'Impresa
matricole dispari

Francesco Lisi

a.a. 2026/2027

Introduzione

- Rigidità dell'approccio parametrico, basato su funzioni matematiche del tempo.
- Difficoltà a cogliere dinamiche di breve periodo.
- Difficoltà a cogliere andamenti irregolari del fenomeno.
- Medie mobili: approccio non parametrico.
- Obiettivi:
  - Stima del trend
  - Stima della componente stagionale
  - Riduzione della componente accidentale (*smoothing*)

Le medie mobili

- Definizione: media mobile a $(m_1 + m_2 + 1)$ termini

$$y_t^* = \theta_{-m_1} y_{t-m_1} + \theta_{-m_1+1} y_{t-m_1+1} + \ldots + \theta_{m_2} y_{t+m_2}$$

o anche

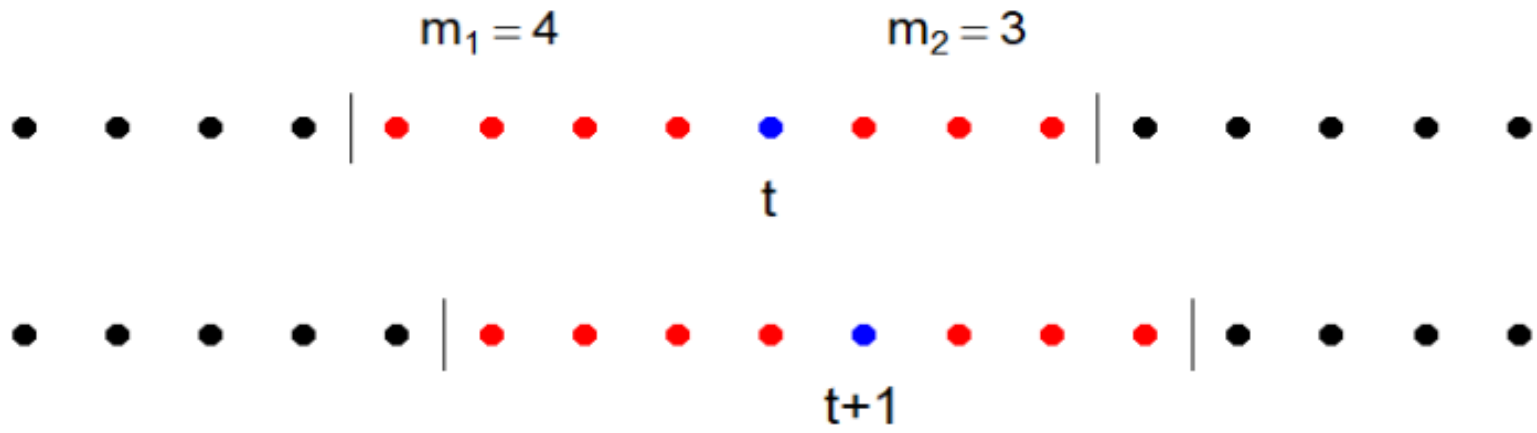
$$y_t^* = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i y_{t+i} \qquad y_t^* = \left[\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i} \right] y_t = M y_t$$

- Esempio: $m_1 = 2,\ m_2 = 1$

$$y_1 \ldots y_{t-3}\ \underbrace{y_{t-2}\ y_{t-1}\ y_t\ y_{t+1}}\ y_{t+2} \ldots y_n$$

$$y_1 \ldots y_{t-3}\ y_{t-2}\ \underbrace{y_{t-1}\ y_t\ y_{t+1},\ y_{t+2}} \ldots y_n$$

Schema



Terminologia (1)

- La m.m. y_t^* è definita per $m_1 + 1 \leq t \leq n - m_2$. Si *perdono*, pertanto, i primi m_1 e gli ultimi m_2 valori.
- **Ordine** della media mobile: $m_1 + m_2 + 1$.
- **Media mobile simmetrica**

$$\theta_{-i} = \theta_i.$$

- **Media mobile semplice**

$$\theta_i = \frac{1}{m_1 + m_2 + 1}.$$

Esempio

Consideriamo la seguente serie storica:

t	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
y_t	6	7	14	3	13	5	15

e la media mobile semplice di ordine 3:

$$y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

Abbiamo quindi:

$$y_{1981}^* = \frac{y_{1980} + y_{1981} + y_{1982}}{3} = \frac{6 + 7 + 14}{3} = 9$$

$$y_{1982}^* = \frac{y_{1981} + y_{1982} + y_{1983}}{3} = \frac{7 + 14 + 3}{3} = 8$$

$$\dots$$

$$y_{1985}^* = \frac{y_{1984} + y_{1985} + y_{1986}}{3} = \frac{13 + 5 + 15}{3} = 11$$

Medie mobili in R

- Comando `filter`

```
mmy=filter(y, filter=c(1/8,rep(2/8,3),1/8),
sides=2)
```

`y`	serie su cui calcolare la m.m.
`filter`	pesi della media mobile
`sides`	se sides = 1 viene calcolata una media asimmetrica utilizzando solo i valori passati; se sides = 2 la media è centrata intorno al ritardo 0. In questo caso la lunghezza della m.m. dovrebbe essere dispari, ma se è pari la m.m. è sempre sbilanciata in avanti.

Medie mobili in R

- Libreria `sse_v4`
- Comando `wma2`

```
mmy=wma2(y, m1=2, m2=2, last=FALSE,
      wts=c(1/8,1/4,1/4,1/4,1/8)), plot=TRUE)
```

`m1, m2`	ordini della media mobile
`wts`	pesi della media mobile
`last`	se T m.m. ultimi degli ultimi $(m_1 + m_2 + 1)$ termini
	se F m.m. di un intorno di y_t
`plot`	se T, viene tracciato il grafico della m.m.

Terminologia (2)

- **Media mobile centrata**: $m_1 = m_2 = m$ (ordine $2m + 1$)

$$y_t^* = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i y_{t+i} \qquad M = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i B^{-i}$$

- Media mobile semplice **centrata** (e **simmetrica**):

$$y_t^* = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^{m} y_{t+i} \qquad t = m+1, \ldots, n-m$$

- Media mobile semplice **non centrata** (ordine $2m$)

$$y_{t-1,t}^* = \frac{1}{2m} \sum_{i=-m}^{m-1} y_{t+i} \qquad y_{t,t+1}^* = \frac{1}{2m} \sum_{i=-m+1}^{m} y_{t+i}$$

Centratura di una media mobile di ordine 2m

- Operazione di *centratura*:

$$y_t^{**} = \frac{y_{t-1,t}^{*} + y_{t,t+1}^{*}}{2}$$

che comporta:

$$y_t^{**} = \frac{y_{t-m} + 2y_{t-m+1} + \ldots + 2y_t + \ldots + 2y_{t+m-1} + y_{t+m}}{4m}$$

- Media mobile ponderata con pesi pari a $\frac{1}{4m}$ alle estremità della serie e a $\frac{1}{2m}$ per i valori intermedi.

Esempio: $m = 2,\ 2m = 4$

$$y^*_{t-1,t} = \frac{1}{4}(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$$

$$y^*_{t,t+1} = \frac{1}{4}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})$$

quindi:

$$\begin{aligned} y^{**}_t &= \frac{y^*_{t-1,t} + y^*_{t,t+1}}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{4} + \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{4}\right) = \\ &= \frac{y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}}{8} \end{aligned}$$

Composizione di medie mobili

- La *composizione di medie mobili* è un'operazione che consente di combinare più medie mobili:

$$M = M_1 \cdot M_2$$

- La composizione gode della proprietà commutativa:

$$M = M_2 \cdot M_1$$

Esempio: composizione di due m.m. semplici di ordine 3 (3x3)

$$M_1 y_t \qquad y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

$$M_2 y_t \qquad y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

$$\begin{aligned} y_t^{**} &= \frac{y_{t-1}^* + y_t^* + y_{t+1}^*}{3} = \qquad M_2(M_1 y_t) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t}{3} + \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3} + \frac{y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{9}y_{t-2} + \frac{2}{9}y_{t-1} + \frac{3}{9}y_t + \frac{2}{9}y_{t+1} + \frac{1}{9}y_{t+2} \qquad t = 3, \ldots, n-2 \end{aligned}$$

Medie mobili simmetriche

- Media mobile simmetrica: se $\theta_i = \theta_{-i}, \quad i = 1, \ldots, m$
- Ordine e coefficienti vengono indicati con

$$M = \{[2m+1]; [\theta_{-m}, \theta_{-m+1}, \ldots, \boldsymbol{\theta_0}]\}$$

dove $\boldsymbol{\theta_0}$ è il termine centrale.

Esempio 1: m.m. semplice di ordine 5:

$$M = \left\{[5]; \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right]\right\}$$

Esempio 2: m.m. composta 3x3:

$$M = \left\{[5]; \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}}\right]\right\}$$

Invarianza rispetto ad una m.m.

Una serie y_t viene detta *invariante* rispetto alla m.m. M se

$$My_t = y_t.$$

In tal caso di dice anche che la m.m. M *conserva* y_t.

- Conservazione di un trend costante

$$\sum_{i=-m}^{m} \theta_i = 1 \Rightarrow Ma = a$$

- Conservazione di un polinomio di grado 1:

$$\sum_{i=-m}^{m} \theta_i = 1 \qquad \sum_{i=-m}^{m} i\theta_i = 0 \Rightarrow M(a+bt) = a+bt$$

$$\sum_{i=-m}^{m} \theta_i[a+b(t+i)] = a\sum_{i=-m}^{m} \theta_i + bt\sum_{i=-m}^{m} \theta_i + b\sum_{i=-m}^{m} i\theta_i = a+bt$$

Invarianza rispetto ad una m.m.

Più in generale, per la conservazione di un polinomio di grado p, devono valere le seguenti $p + 1$ condizioni:

a. $\sum_{i=-m}^{m} \theta_i = 1$

b. $\sum_{i=-m}^{m} i^r \theta_i = 0 \qquad r = 1, \ldots, p$

Applicazione di una m.m ad un WN

Valutiamo gli effetti di una media mobile centrata sulla componente di disturbo $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

$$\varepsilon_t^* = M\varepsilon_t = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i \varepsilon_{t+i}$$

$$E[\varepsilon_t^*] = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i E[\varepsilon_{t+i}] = 0$$

$$Var(\varepsilon_t^*) = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 Var(\varepsilon_{t+i}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 = \sigma_\varepsilon^{*2}$$

Si ha riduzione della variabilità se $\sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 < 1$.

Rapporto di riduzione della varianza residua: $\dfrac{\sigma_\varepsilon^{*2}}{\sigma_\varepsilon^2} = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2$.

Applicazione di una m.m ad un WN

Le variabili trasformate ε_t^* sono correlate, infatti:

$$Cov[\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+h}^*] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=h-m}^{m} \theta_i \theta_{i-h} & \text{se } h \leq 2m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove:

$$Cov[\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+h}^*] = E[\varepsilon_t^* \cdot \varepsilon_{t+h}^*] - E[\varepsilon_t^*]E[\varepsilon_{t+h}^*] = E[\varepsilon_t^* \cdot \varepsilon_{t+h}^*]$$

Esempio

$$M = \left\{ [3]; \left[\frac{1}{3}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \right] \right\} \quad \Rightarrow \quad M\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}}{3}$$

Calcoliamo la covarianza fra ε_t^* e ε_{t+h}^* per $h \neq 0$:

- Per $h = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+1}^*) &= E[\varepsilon_t^* \varepsilon_{t+1}^*] = E\left[\frac{\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}}{3} \cdot \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}}{3} \right] \\ &= \frac{1}{9} E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+2} + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_t\varepsilon_{t+1} + \\ &\quad + \varepsilon_t\varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+1}\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}^2 + \varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t+2}] = \\ &= \frac{1}{9}(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2) = \frac{2}{9}\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

- Per $h = 2$ si ha:

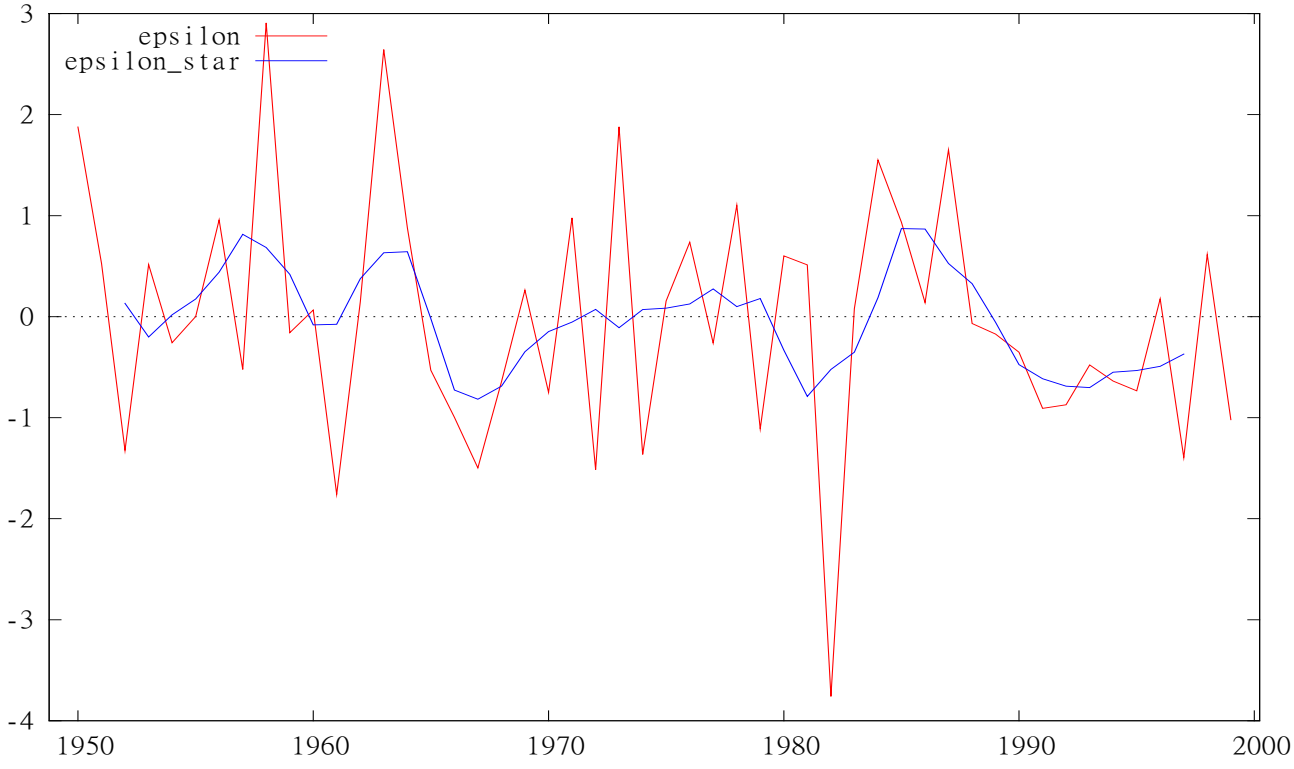
$$Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+2}^*) = E[\varepsilon_t^* \varepsilon_{t+2}^*] = \frac{1}{9}\sigma_\varepsilon^2$$

- Per $h > 2$ si ha:

$$Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+h}^*) = E[\varepsilon_t^* \varepsilon_{t+h}^*] = 0$$

Effetto di Slutsky-Yule

Applichiamo alla serie (file: *eps.txt*) $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$ la media mobile $M = \left\{[5]; \left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}\right]\right\}$.
ε_t^* presenta *regolarità* che possono erroneamente essere ritenute effetto della componente ciclica e/o stagionale:



Stima delle componenti

La stima delle componenti si basa sulla capacità di un'opportuna m.m. di:

i. conservare un trend polinomiale (di grado opportuno)
ii. eliminare un'onda periodica (di periodo opportuno)
iii. attenuare la componente erratica

i. Conservazione di un trend polinomiale

Esempio: una media mobile aritmetica semplice (centrata) riproduce un trend lineare.
Consideriamo la serie storica $y_t = T_t = 1 + 0.7t, \quad t = 1, \ldots, 20$:

$$\begin{aligned} y &= (1.7, 2.4, 3.1, 3.8, 4.5, 5.2, 5.9, 6.6, 7.3, 8.0, \\ &\quad 8.7, 9.4, 10.1, 10.8, 11.5, 12.2, 12.9, 13.6, 14.3, 15) \end{aligned}$$

Se, p.e., applichiamo la media mobile
$y_t^* = \frac{1}{5}(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})$, otteniamo:

$$\begin{aligned} y_3^* &= \frac{1}{5}(1.7 + 2.4 + 3.1 + 3.8 + 4.5) = 3.1 \\ \vdots &= \vdots \\ y_{18}^* &= \frac{1}{5}(12.2 + 12.9 + 13.6 + 14.3 + 15) = 13.6 \end{aligned}$$

ii.a. Eliminazione di un'onda periodica

Un'onda di periodo s viene eliminata da una m.m. aritmetica di ordine pari al periodo s.

Esempio: consideriamo la s.s. $y_t = S_t$ con $s = 5$ e $n = 20$:

$$y = (\underbrace{3.5, 5, 4, 6, 8}, \underbrace{3.5, 5, 4, 6, 8}, \underbrace{3.5, 5, 4, 6, 8}, \underbrace{3.5, 5, 4, 6, 8})$$

e applichiamo la media aritmetica di ordine 5:

$$\begin{aligned} y_3^* &= \frac{1}{5}(3.5 + 5 + 4 + 6 + 8) = 5.3 \\ y_4^* &= \frac{1}{5}(5 + 4 + 6 + 8 + 3.5) = 5.3 \\ \vdots &= \vdots \\ y_{18}^* &= \frac{1}{5}(3.5 + 5 + 4 + 6 + 8) = 5.3 \end{aligned}$$

ii.b. Eliminazione di un'onda periodica

Esempio: consideriamo la s.s. $y_t = S_t$ con $s = 4$ e $n = 16$:

$$y = (\underbrace{3.5, 5, 4, 6}, \underbrace{3.5, 5, 4, 6}, \underbrace{3.5, 5, 4, 6}, \underbrace{3.5, 5, 4, 6})$$

e applichiamo la media aritmetica di ordine 4 ($m_1 = 1$ e $m_2 = 2$):

$$\begin{aligned} y^*_{2,3} &= \frac{1}{4}(3.5 + 5 + 4 + 6) = 4.625 \\ y^*_{3,4} &= \frac{1}{4}(5 + 4 + 6 + 3.5) = 4.625 \\ \vdots &= \vdots \\ y^*_{14,15} &= \frac{1}{4}(3.5 + 5 + 4 + 6) = 4.625 \end{aligned}$$

Ovviamente, la m.m. appena considerata non è centrata.

ii.c. Eliminazione di un'onda periodica

Consideriamo ora la m.m. a 5 termini ottenuta come centratura di una m.m. a 4 termini applicata ad un serie con periodo $s = 4$

$$\begin{aligned} y_t^{**} &= \frac{1}{2}(y_{t-1,t}^{*} + y_{t,t+1}^{*}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{4} + \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2\,y_{t-1} + 2\,y_t + 2\,y_{t+1} + y_{t+2}) \end{aligned}$$

Quando si applica questa m.m. si ha

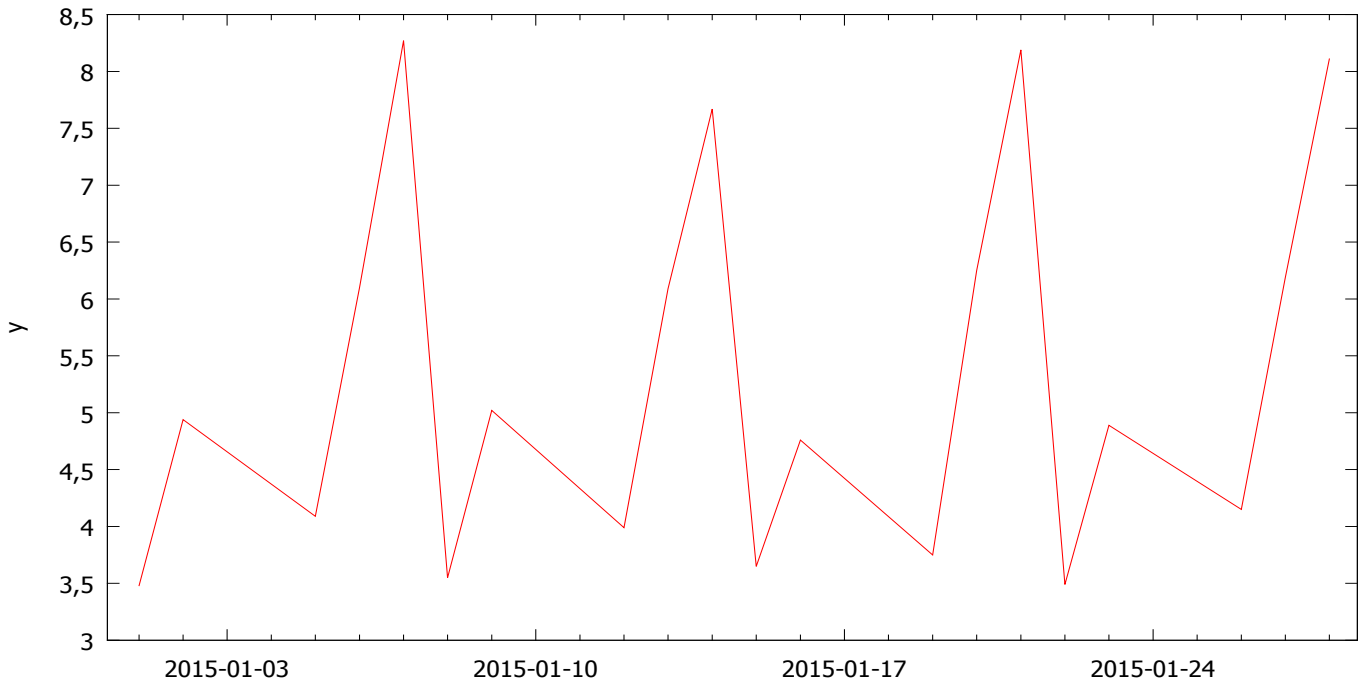
$$\begin{aligned} y_3^{**} &= \frac{1}{8}(3.5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3.5) = 4.625 \\ y_3^{**} &= \frac{1}{8}(5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3.5 + 5) = 4.625 \\ y_3^{**} &= \frac{1}{8}(4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3.5 + 2 \cdot 5 + 4) = 4.625 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Stagionalità più errore (vedi mm1.R)

Consideriamo ora una s.s. del tipo $y_t = S_t + \varepsilon_t$ con $s = 5$ e $n = 20$:

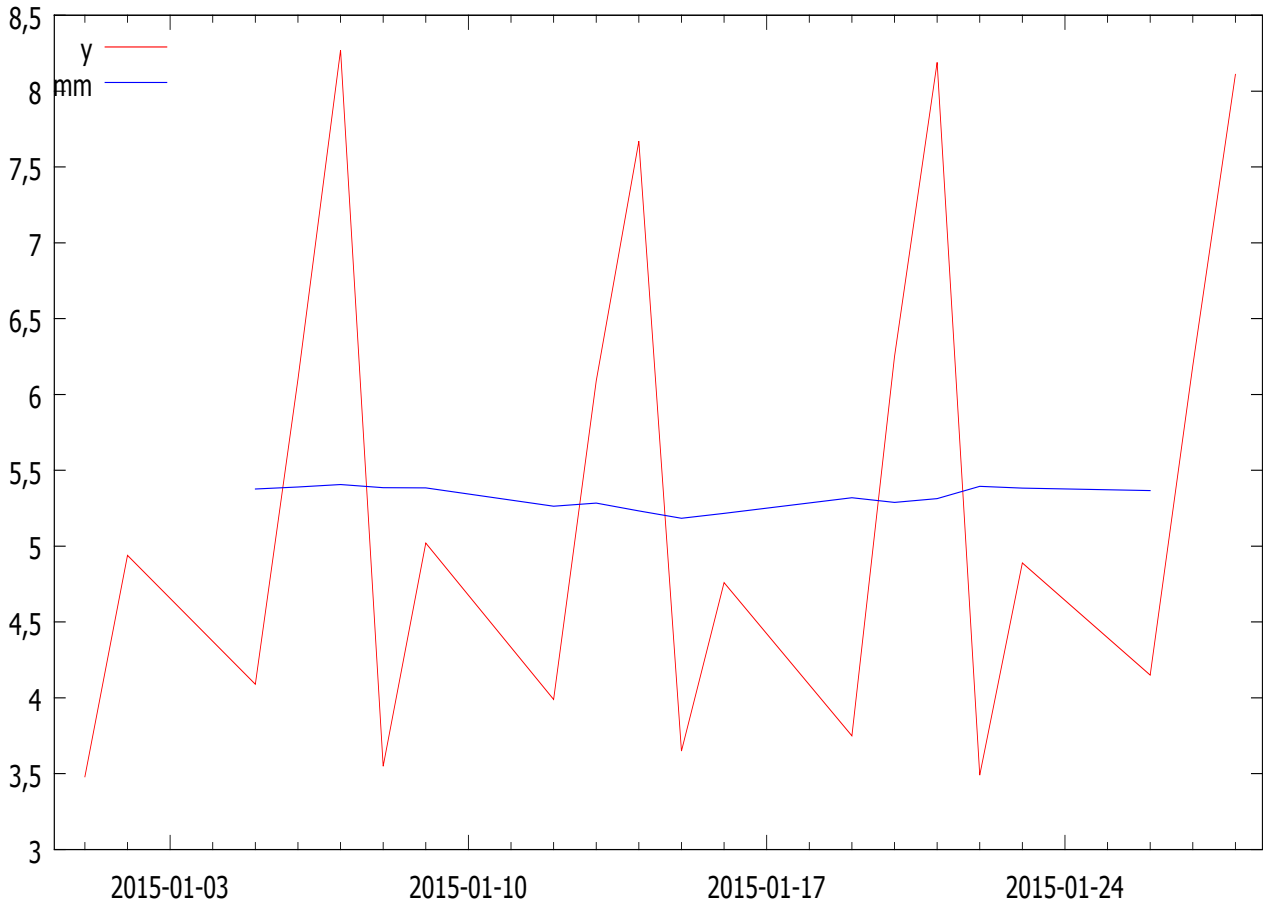
$$y = (3.48, 4.94, 4.09, 6.10, 8.27, 3.55, 5.02, 3.99, 6.09, 7.67, 3.65, 4.76, 3.75, 6.25, 8.19, 3.49, 4.89, 4.15, 6.19, 8.11)$$

il cui grafico è (vedi file mm1.R):



Stagionalità più errore

Applicando una m.m. semplice di ordine 5 a tali dati si ottiene:



iii. Riduzione della componente erratica (vedi mm2.R)

Esempio: se applicata ad una serie che non sia un WN una m.m. aritmetica riduce la componente erratica.

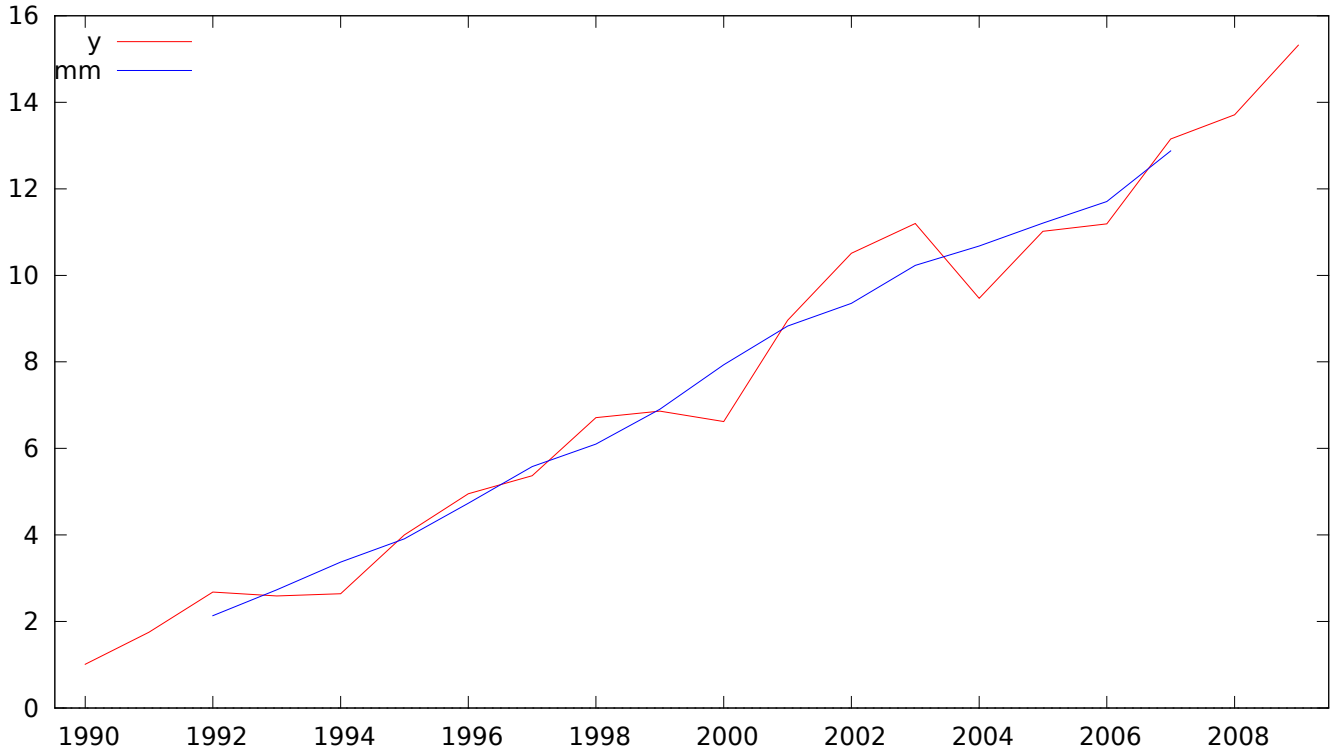
Consideriamo una serie generata dal modello $y_t = T_t + \varepsilon_t$, con $T_t = 1 + 0.7t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, 1)$ e $n = 20$ (file mm2.R):

$$\begin{aligned} y \quad = \quad & (1.01, 1.75, 2.68, 2.59, 2.64, 4.00, 4.95, 5.37, 6.71, 6.86, \\ & 6.62, 8.96, 10.51, 11.20, 9.47, 11.02, 11.19, 13.15, 13.71, 15.32) \end{aligned}$$

e applichiamo la solita m.m. semplice di ordine 5:

$$y_t^* = \frac{1}{5}(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})$$

Riduzione della componente erratica



- Il rapporto di riduzione della varianza residua è

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^{*2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}} = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 = 5 \cdot \frac{1}{5^2} = 0.2$$

- il trend viene conservato

Due m.m. importanti

- Approccio semplice e di primo utilizzo: m.m. semplici e **centrate** $12x2$ o $4x2$ a seconda della frequenza della serie.
- Dati mensili (periodo 12):

$$y_t^{**} = \frac{1}{24}(y_{t-6}+2y_{t-5}+\ldots+2y_t+\ldots+2y_{t+5}+y_{t+6}) \quad t = 7,\ldots,n-6$$

- Dati trimestrali (periodo 4):

$$y_t^{**} = \frac{1}{8}(y_{t-2}+2y_{t-1}+2y_t+2y_{t+1}+y_{t+2}) \quad t = 3,\ldots,n-2$$

- Entrambe preservano trend lineari; la prima elimina stagionalità di periodo s=12, la seconda di periodo s=4.

Le medie mobili di Spencer (per serie trimestrali)

- Ottenute come composizione di m.m. elementari:

$$M_{15} = M_4 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_{5S} = \left\{ [15]; \frac{1}{320}[-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, \mathbf{74}] \right\}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= M_5 \cdot M_5 \cdot M_7 \cdot M_{7S} = \\ &= \left\{ [21]; \frac{1}{350}[-1, -3, -5, -5, -2, 6, 18, 33, 47, 57, \mathbf{60}] \right\} \end{aligned}$$

- M_q, $q = 4, 5, 7$, indica una m.m. aritmetica semplice di ordine q, mentre le restanti medie mobili sono pari a:

$$M_{5S} = \left\{ [5]; \frac{1}{4}[-3, 3, \mathbf{4}] \right\} \quad M_{7S} = \left\{ [7]; \frac{1}{2}[-1, 0, 1, \mathbf{2}] \right\}$$

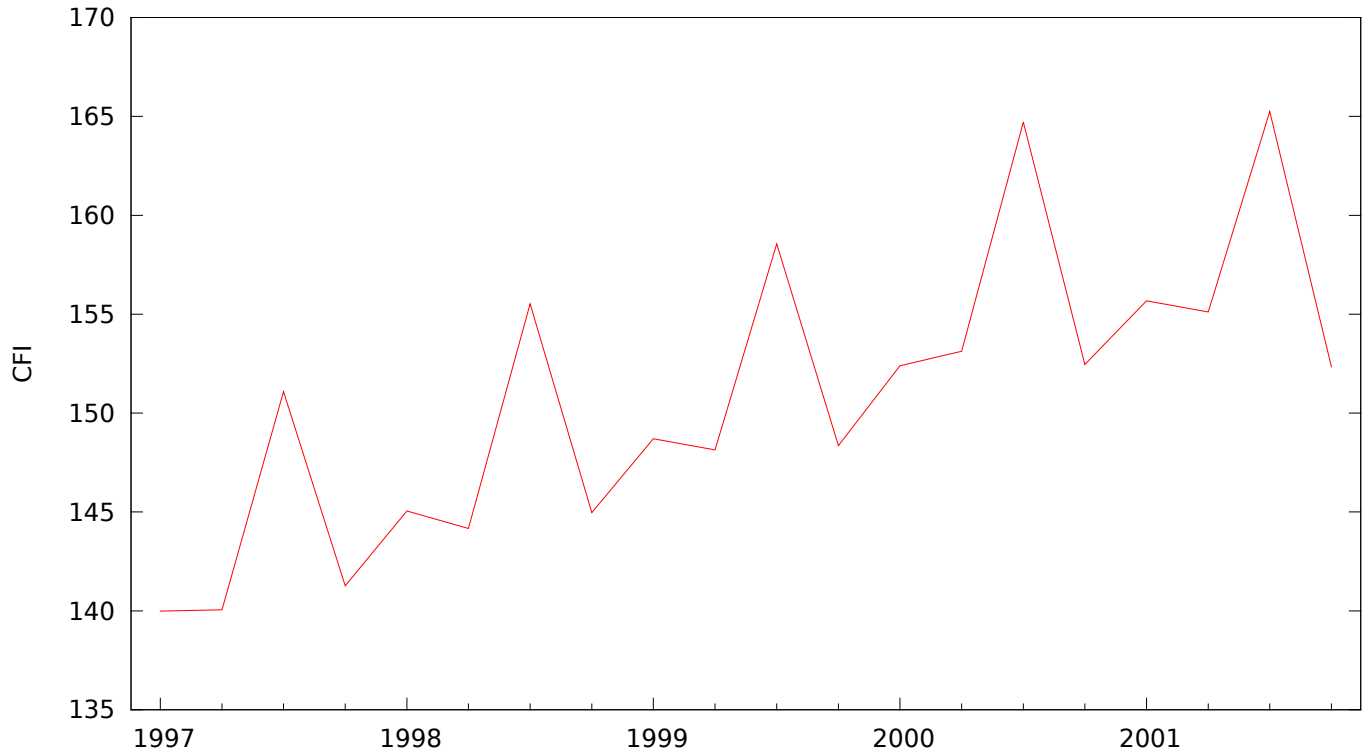
Le medie mobili di Spencer (per serie trimestrali)

Le m.m. di Spencer:

1. annullano componenti stagionali di periodo 4 e di periodo 5 **e**
2. conservano polinomi di grado minore o uguale a 3.

(provare!)

Esempio di destagionalizzazione: i consumi finali interni 1997.1-2001.4



Consumi finali interni delle famiglie dell'Italia

- $N = 5$ anni di dati trimestrali, quindi $n = 20$
- Assunti
  - Serie trimestrale, quindi $s = 4$
  - Modello additivo $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$
  - Componente di trend approssimativamente lineare
  - Componente stagionale stabile e priva di particolari irregolarità
  - Nella stima del trend facciamo ricadere anche la stima del ciclo
- Calcoli dettagliati a pag. 103-108 del libro

P.S. La serie è disponibile nel file *CFI.txt*

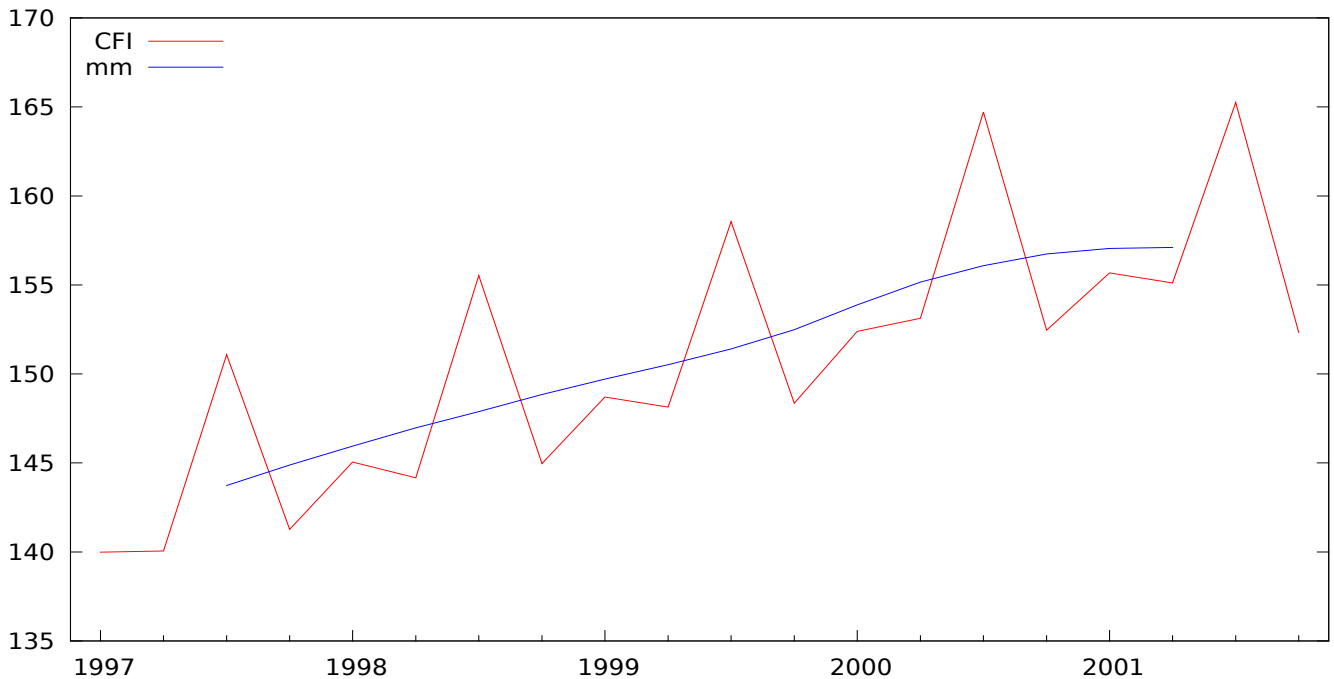
Stima delle componenti e destagionalizzazione

- Stima preliminare del trend: calcolo di un'opportuna media mobile y_t^{**}
- Calcolo dei coefficienti specifici di stagionalità $(y_t - y_t^{**})$
- Calcolo dei coefficienti grezzi di stagionalità $\hat{S}_j^*, \quad j = 1, \ldots, 4$
- Calcolo dei coefficienti ideali di stagionalità $\hat{S}_j$
- Calcolo della serie destagionalizzata y_t^d

Prima stima del trend: calcolo di una m.m. opportuna

Calcolo di un'opportuna media mobile per dati trimestrali: m.m. ottenuta come centratura di due m.m. semplici a 4 termini:

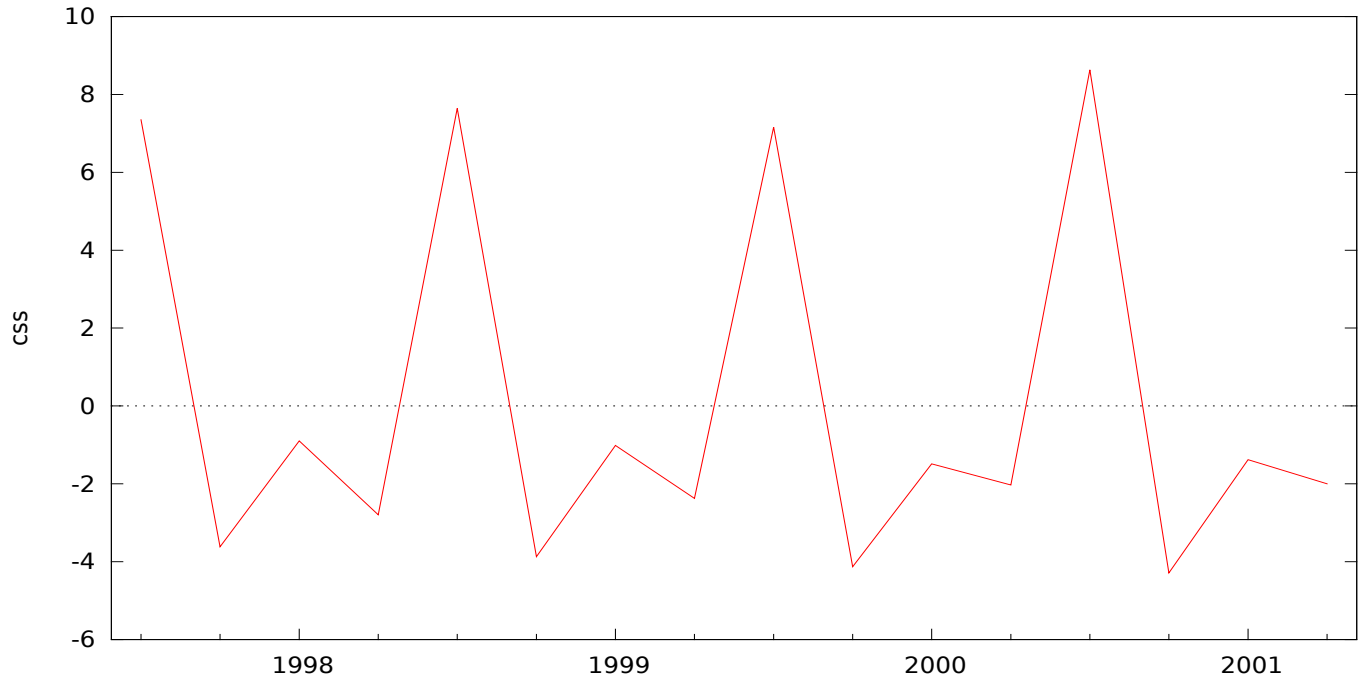
$$\hat{T}_t = y_t^{**} = \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}) \quad t = 3, \ldots, n-2$$



Calcolo dei coefficienti specifici di stagionalità

$$CS_t = y_t - y_t^{**} = T_t + S_t + \varepsilon_t - \hat{T}_t \approx S_t + \varepsilon_t, \quad t = 3, \ldots, n-2$$

- mancano i valori iniziali e finali
- sono indici specifici perché non assumono esattamente lo stesso valore negli stessi trimestri



Indici specifici di stagionalità

Coefficienti specifici di stagionalità

1997:1	
1997:2	
1997:3	7.351875
1997:4	-3.614500
1998:1	-0.895625
1998:2	-2.796500
1998:3	7.643375
1998:4	-3.871125
1999:1	-1.012125
1999:2	-2.374125
1999:3	7.158625
1999:4	-4.129500
2000:1	-1.487875
2000:2	-2.030375
2000:3	8.630625
2000:4	-4.285625
2001:1	-1.380750
2001:2	-1.998125
2001:3	
2001:4	

Calcolo dei coefficienti grezzi di stagionalità

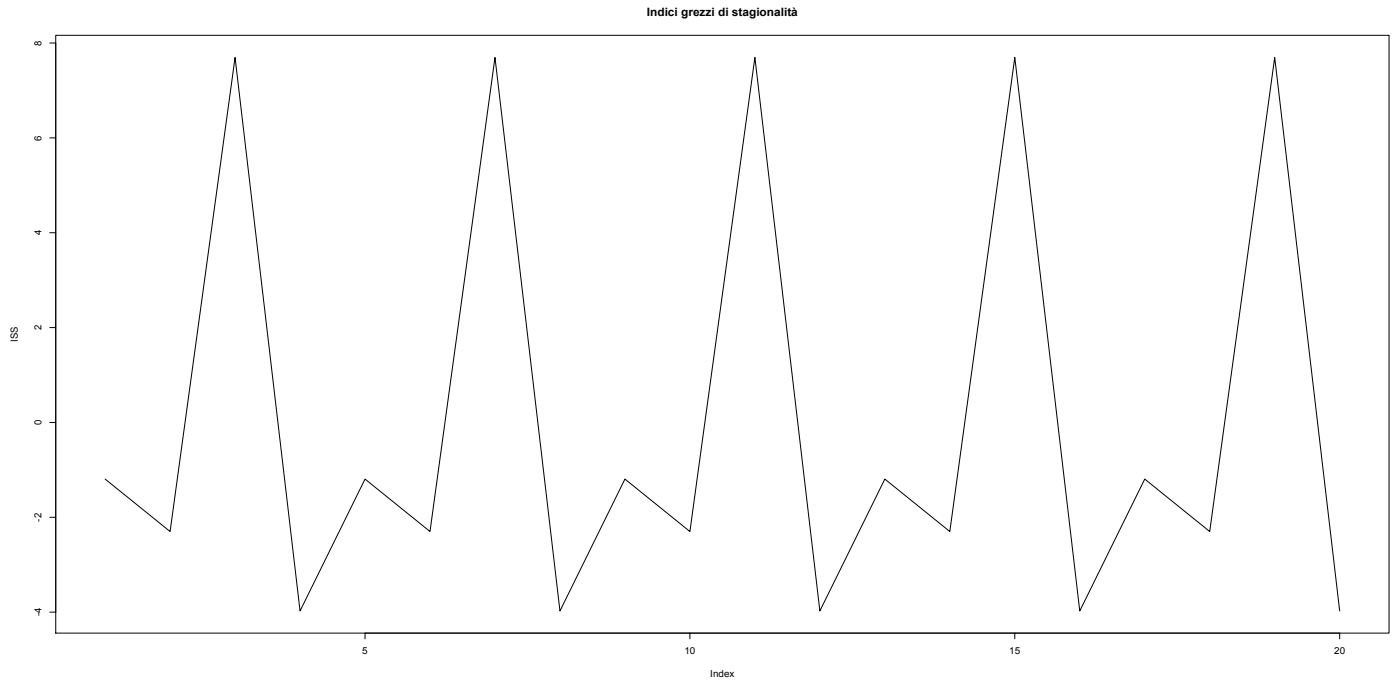
$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} CS_{t,j} \qquad j = 1, \ldots, 4, \quad N = 4$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_1^* &= \frac{-0.895625 - 1.012125 - 1.487875 - 1.380750}{4} = -1.194094 \\
\hat{S}_2^* &= \frac{-2.796500 - 2.374125 - 2.030375 - 1.998125}{4} = -2.299781 \\
\hat{S}_3^* &= \frac{7.351875 + 7.643375 + 7.158625 + 8.630625}{4} = 7.696124 \\
\hat{S}_4^* &= \frac{-3.614500 - 3.871125 - 4.129500 - 4.285625}{4} = -3.975188
\end{aligned}$$

I coefficienti grezzi sono medie dei coefficienti specifici sugli stessi trimestri. Att.ne: in generale, non è detto che nella serie storica ci sia lo stesso numero di trimestri per tutti i quattro trimestri!

Calcolo dei coefficienti grezzi di stagionalità

Questi coefficienti si ripetono $N = 5$ volte e danno luogo alla serie:



Coefficienti grezzi di stagionalità

Calcolo dei coefficienti ideali di stagionalità

I coefficienti grezzi sommano a zero? NO, infatti:

$$\sum_{j=1}^{4} \hat{S}_j^* = 0.227061$$

e quindi anche la loro media non è zero:

$$\bar{S}^* = 0.05676525$$

Noi, invece, vogliamo che i coefficienti di stagionalità abbiano media nulla, per cui calcoliamo gli scarti dalla media:

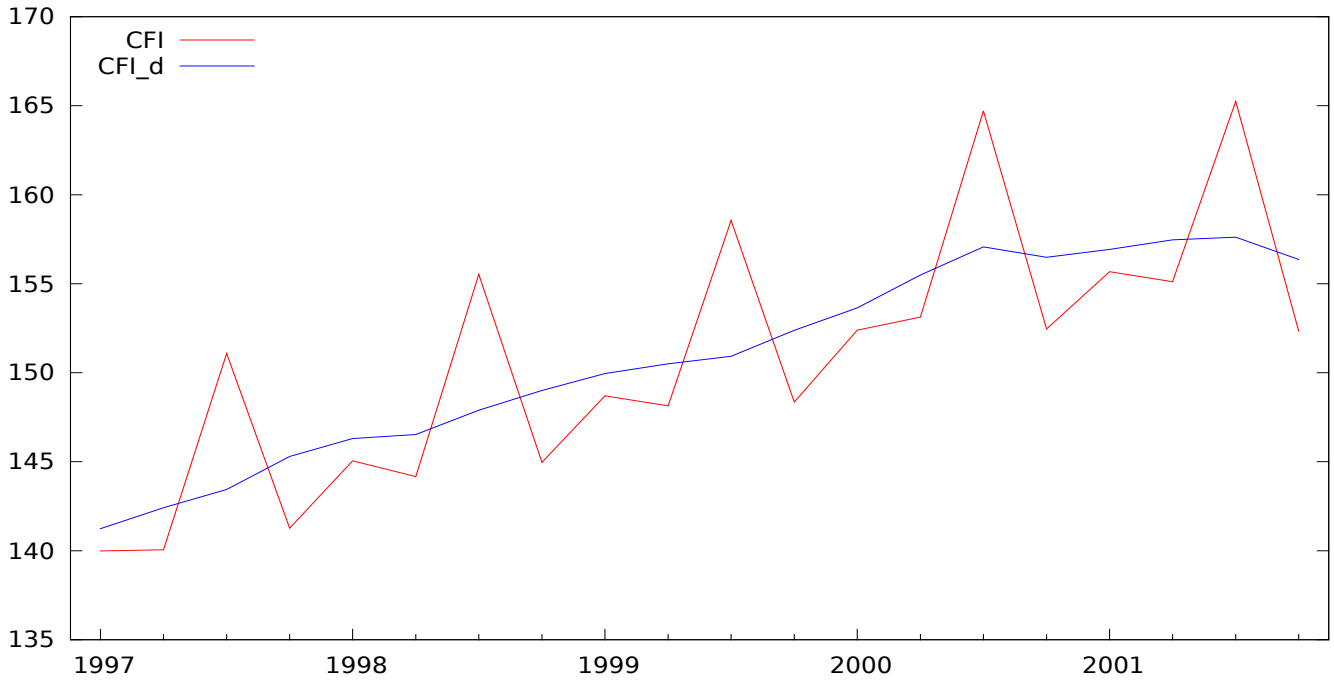
$$\hat{S}_j = \hat{S}_j^* - \bar{S}^* \qquad j = 1, \ldots, 4$$

e costruiamo la serie storica della componente stagionale come:

$$\hat{S}_t = \{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4, \ldots, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4\}$$

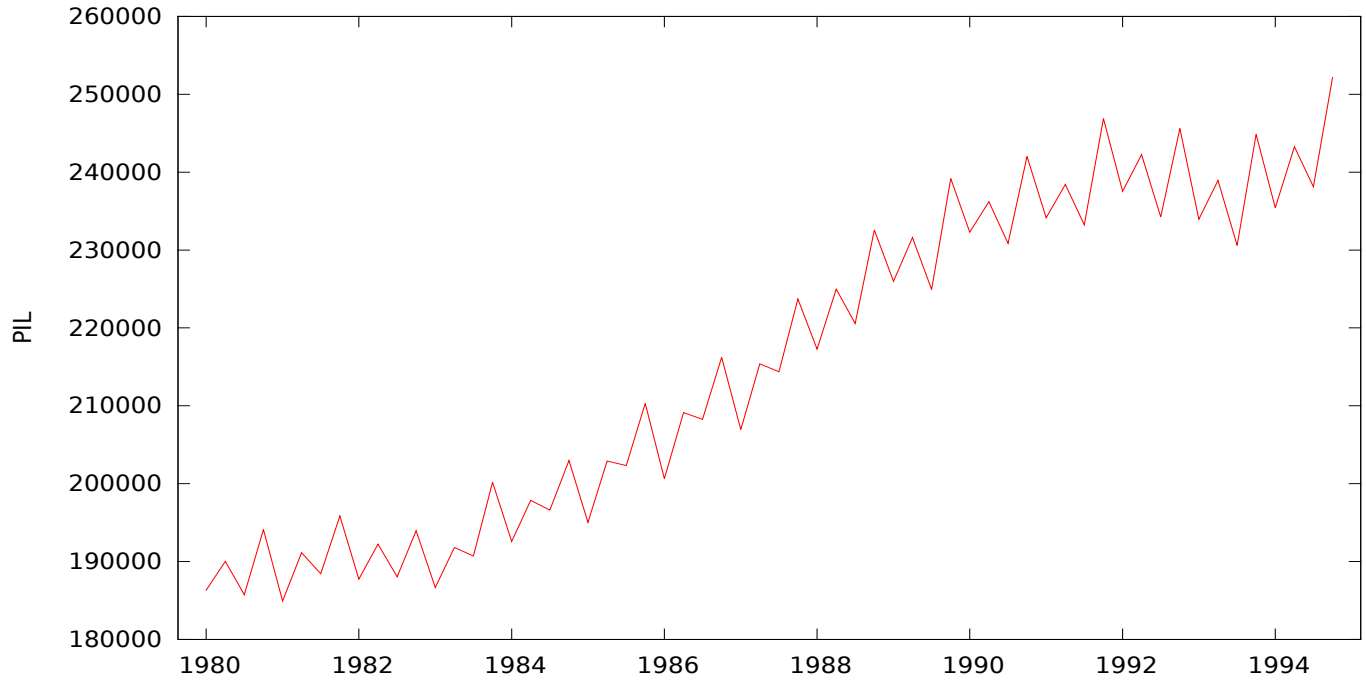
Serie destagionalizzata

Calcolo della serie destagionalizzata: $y_t^d = y_t - \hat{S}_t$.



La stagionalità viene eliminata subordinatamente alla definizione adottata.
La serie destagionalizzata rappresenta un andamento idealizzato, ottenuto in base ad ipotesi ben precise.

Esempio di destagionalizzazione: PIL trimestrale - 1980:1 - 1994:4



Prodotto Interno Lordo ai prezzi di mercato (base 1985=100)

Sotto l'ipotesi di modello additivo, calcolare mediante medie mobili opportune:

i. La stima preliminare del trend, y_t^{**}
ii. I coefficienti specifici di stagionalità, $(y_t - y_t^{**})$
iii. I coefficienti grezzi di stagionalità, S_j^*
iv. I coefficienti ideali di stagionalità, $\hat{S}_j$
v. La serie destagionalizzata, y_t^d

Assunti:

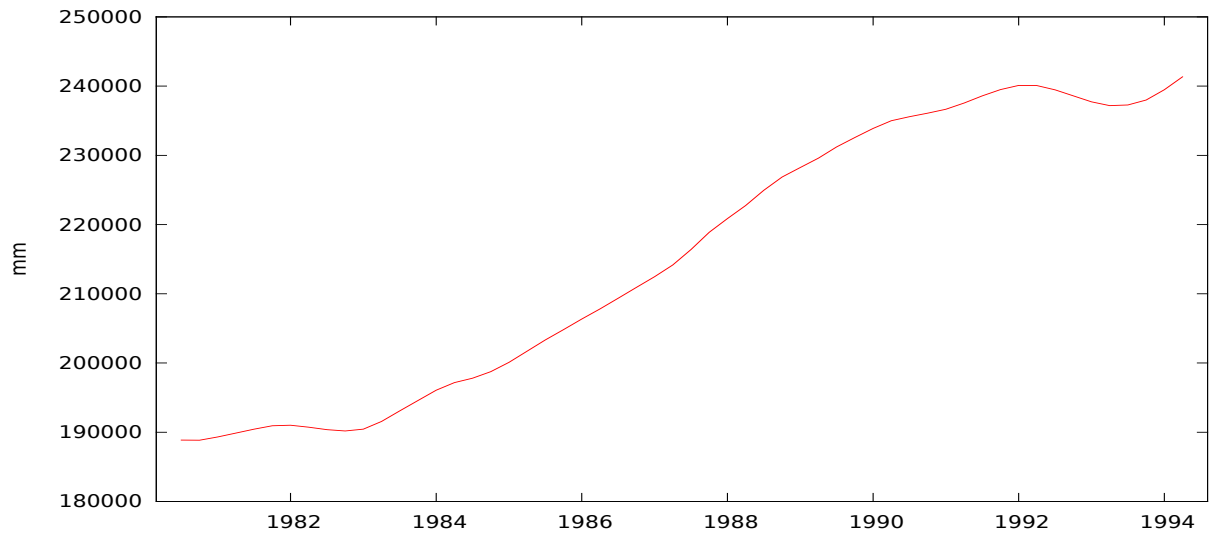
- Serie trimestrale, $n = 60$ equivalenti a $N = 15$ anni
- Modello additivo: $y_t = (T_t + C_t) + S_t + \varepsilon_t$
- Componente stagionale stabile e priva di particolari irregolarità
- Nella stima del trend facciamo ricadere anche la stima del ciclo

P.S. La serie è disponibile nel file *PIL.txt*

Stima preliminare del trend: calcolo di un'opportuna media mobile

Essendo i dati trimestrali, possiamo utilizzare la m.m. ottenuta come centratura di due m.m. semplici a quattro termini, per cui:

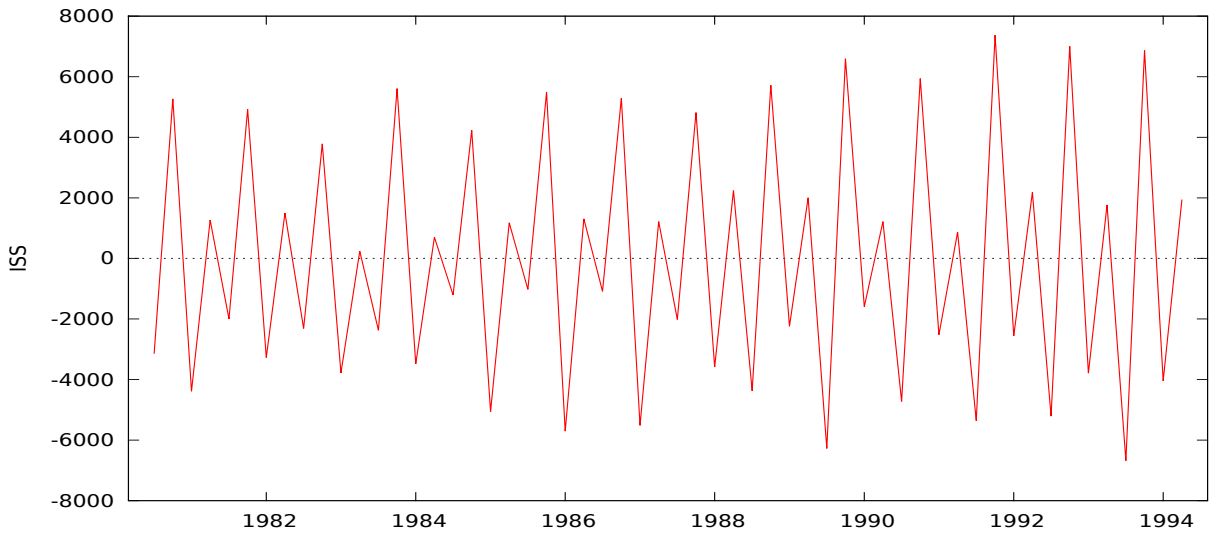
$$\hat{T}_t = y_t^{**} = \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}) \qquad t = 3, \ldots, n-2$$



Stima preliminare del trend

Calcolo dei coefficienti specifici di stagionalità

$$CS_t = y_t - y_t^{**} \qquad t = 3, \ldots, n-2$$

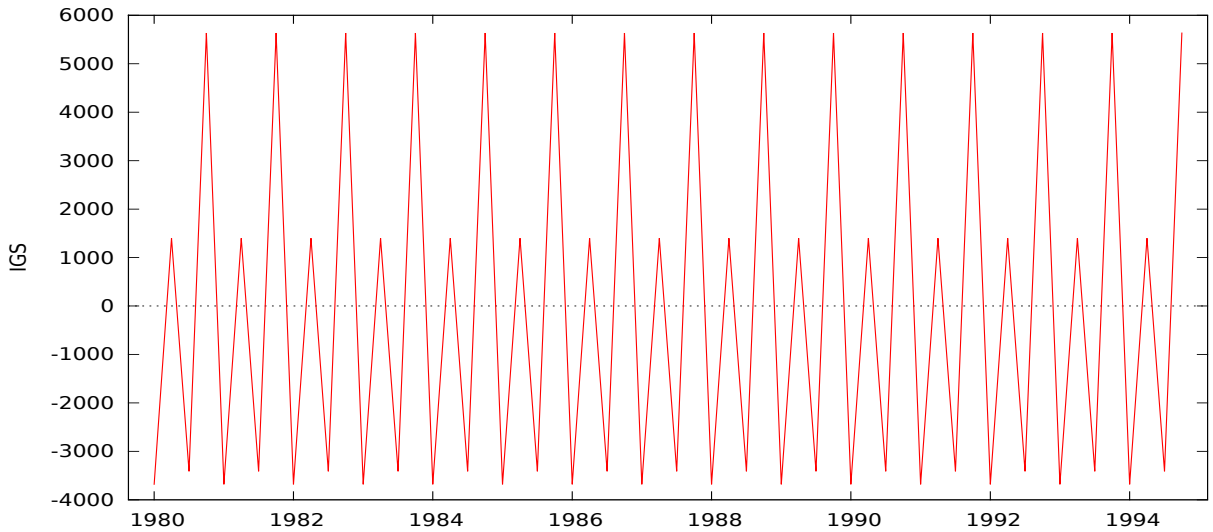


Coefficienti specifici di stagionalità

Calcolo dei coefficienti grezzi di stagionalità

$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} CS_{t,j} \qquad j = 1, \ldots, 4, \quad N = 14$$

Si ottiene: $\hat{S}_1^* = -3680.286$, $\hat{S}_2^* = 1400.116$, $\hat{S}_3^* = -3411.795$ e $\hat{S}_4^* = 5635.045$

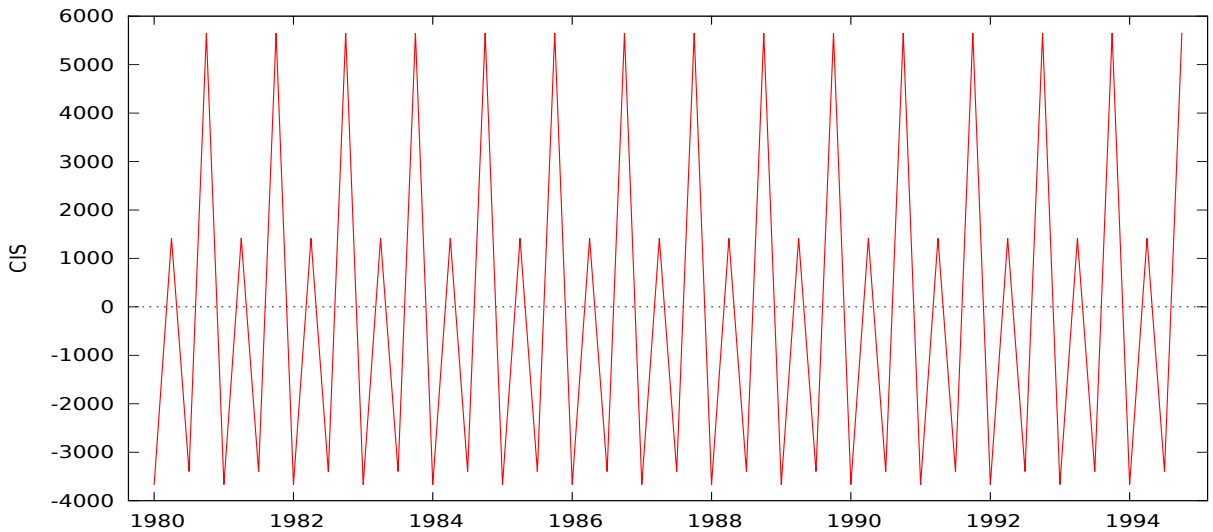


Coefficienti grezzi di stagionalità

Calcolo dei coefficienti ideali di stagionalità

Poiché $\sum_{j=1}^{4} \hat{S}_j^* = 56$ calcolo i coefficienti ideali di stagionalità come: $\hat{S}_j = \hat{S}_j^* - \bar{S}^*, \quad j = 1, \ldots, 4$ con $\bar{S}^* = -14.23$ e ottengo la stima della componente stagionale:

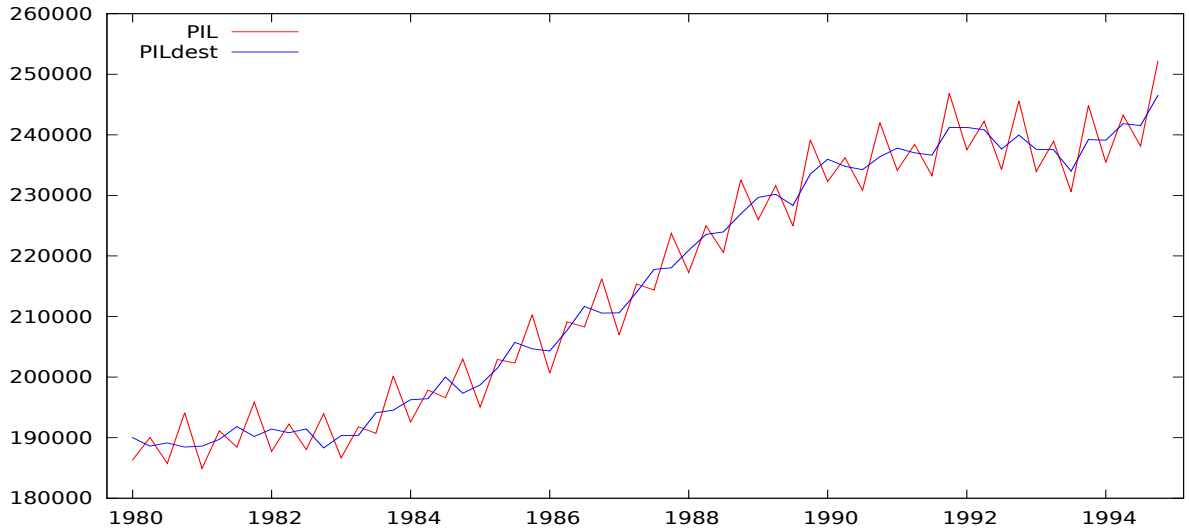
$$\hat{S}_t = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4, \ldots, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4)$$



Coefficienti ideali di stagionalità

Calcolo della serie destagionalizzata

Finalmente, si ottiene la serie destagionalizzata: $y_t^d = y_t - \hat{S}_t$



Serie destagionalizzata

Come prima, la stagionalità viene eliminata subordinatamente alla definizione adottata e la serie destagionalizzata rappresenta un andamento *idealizzato*, ottenuto in base ad ipotesi ben precise.

E se il modello è moltiplicativo?

Negli esempi precedenti abbiamo ipotizzato che il modello sottostante la serie sia additivo.

A volte ha senso ipotizzare un modello moltiplicativo del tipo:

$$y_t = (T_t C_t) S_t \varepsilon_t$$

In questo caso i passi da seguire sono ancora gli stessi con alcune ovvie variazioni.

Modello moltiplicativo

i. Si calcola la stima preliminare del trend, y_t^{**}

ii. Si determinano i rapporti o indici specifici di stagionalità:

$$IS_t = \frac{y_t}{y_t^{**}} \approx S_t \varepsilon_t$$

iii. Si calcolano gli indici grezzi di stagionalità,:

$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} IS_{t,j}, \quad j = 1, \ldots, s$$

iv. Si verifica se $\prod_{j=1}^{s} \hat{S}_j^* = 1$ e, se così non è:

v. si calcolano gli indici ideali di stagionalità:

$$\hat{S}_j = \frac{\hat{S}_j^*}{\sqrt[s]{\prod_{j=1}^{s} \hat{S}_j^*}}$$

vi. La serie destagionalizzata si ottiene quindi come: $y_t^d = \frac{y_t}{\hat{S}_t}$

Principi generali di costruzione di una m.m.

Come devono essere scelti i coefficienti θ_i di una m.m.?

- Un possibile criterio: scegliere i θ_i in modo che conservino particolari componenti, ovvero ne annullino altre.
- Esistono molte m.m. che soddisfano i criteri di invarianza di certi trend e di annullamento di particolari componenti stagionali.
- Un modo per tener conto anche della componente accidentale, rendere minima la quantità:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2*}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}$$

- I più curiosi possono leggere nel libro come si fa!

Il metodo Census X11

- Nucleo essenziale di una procedura ancor oggi largamente usata (X11-ARIMA e X12-ARIMA)
- Applicazione iterata di medie mobili
- Stima della componente di ciclo-trend
- Destagionalizzazione
- È equivalente ad applicare alla serie una m.m. ottenuta come composizione di varie m.m.
- Nel caso di dati trimestrali: m.m. ponderata di ordine 57