

# **METODI STATISTICI PER LA BIOINGEGNERIA**

## **Laboratorio 1**

A.A. 2026-2027

**Enrico Longato**



# Le ore di laboratorio sono materia d'esame

L'esame prevede una prova pratica di MATLAB che peserà per circa un terzo (11 punti) sul voto totale dell'esame.

In pratica:

- Avrete 60 minuti per svolgere 4 esercizi MATLAB, da ~3 punti ciascuno, al calcolatore.
- Ciascun esercizio sarà composto da una parte di produzione del codice "da zero" e da una o più richieste di commento sul risultato ottenuto.
- Dunque, è importante sia **saper scrivere codice a partire da un file vuoto**, sia comprendere e **saper commentare quanto codificato**.



## Contenuto della prova MATLAB

**La prova MATLAB conterà di 4 esercizi delle seguenti tipologie:**

1. Regressione lineare (con la formula risolutiva codificata esplicitamente!).
2. Applicazione di un test statistico tra quelli visti a lezione.
3. Pulizia, pre-processing o trasformazione dati.
4. Esercizio su uno degli altri argomenti del corso: survival analysis, clustering, analisi dei residui, gestione della collinearità, regressione regolarizzata.

### **Alcune note ulteriori**

- Non ci saranno sorprese: gli esercizi saranno sempre e solo delle tipologie indicate sopra.
- A livello di codice, la soluzione degli esercizi sarà sempre esattamente sovrapponibile a quanto visto a lezione (le uniche, minime, varianti saranno nella pulizia dati che è difficilmente "copiaincollabile").
- All'esame saranno previsti tre tipi di risposte:
  - i. Risposta numerica secca: gli esercizi saranno ben congegnati in modo che la risposta numerica sia sempre e solo in seguito a un calcolo "atomico" e che sia corretta se e solo se il (mini)procedimento è corretto.
  - ii. Risposta discorsiva breve: lapidario commento ai risultati, tipicamente nella forma "sì/no e perché".
  - iii. Grafico su MATLAB: deve essere corretto in tutte le sue parti come da richiesta d'esame.



## ISCRIZIONE CORSO SU STEM ELEARNING

<https://stem.elearning.unipd.it/course/view.php?id=17222>

N.B. accedere con modalità SSO (= "attraverso UNIWEB") con la mail @studenti.unipd.it

Nella pagina elearning del corso troverete, per ciascuna esercitazione:

- Una copia delle slide mostrate a lezione.
- I file da scaricare per svolgere l'esercitazione in aula (se necessari).
- **Dopo la lezione**, uno o più file .m con la soluzione proposta.



## Laboratorio 1: Contenuti e obiettivi

### 1. Esercitazione "alla lavagna"

- Basi dell'ambiente di sviluppo MATLAB (v. dispense su elearning)
- Indicizzazione di matrici
- Operazioni tra vettori

### 2. Esercizi da svolgere in autonomia (per superare la "paura del file bianco")

- Autovettori, autovalori, inversa di matrice
- Massimo e minimo
- Generazione di sequenze (vettori equispaziati, in scala lineare, in scala logaritmica)

### 3. Ripasso di teoria (**parte integrante del programma d'esame di teoria!**)

- Norma di un vettore
- Autovettori e autovalori
- Inversa di matrice



**Prima di svolgere l'esercitazione (oppure al bisogno), utilizzare il comando **help** di MATLAB seguito dal nome delle seguenti function, utili allo svolgimento degli esercizi.**

## Esercizio 1 (svolto)

- find, size, sub2ind, ind2sub

## Esercizio 2 (svolto)

- norm

## Esercizio 3 (proposto)

- rank, eig, inv, min, max

## Esercizio 4 (proposto)

- linspace, logspace, horzcat

```
>> help find
find - Find indices and values of nonzero elements
This MATLAB function returns a vector containing the linear indices of
each nonzero element in array X.

Syntax
k = find(X)
k = find(X,n)
k = find(X,n,direction)

[row,col] = find(___)
[row,col,v] = find(___)

Input Arguments
X - Input array
    scalar | vector | matrix | multidimensional array
n - Number of nonzeros to find
    positive integer scalar
direction - Search direction
    'first' (default) | 'last'

Output Arguments
k - Indices to nonzero elements
    vector
row - Row subscripts
    vector
col - Column subscripts
    vector
v - Nonzero elements of X
    vector
```



## ESERCIZIO 1 (svolto)

- Creare una matrice 3x4 con i seguenti elementi e inserirla in una variabile chiamata `mat2D`

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Trovare l'indice dell'elemento cerchiato (criterio "`== 2`") utilizzando **`find`**
- Tradurre l'indice lineare in formato riga/colonna utilizzando **`ind2sub`**
- Ricavare viceversa l'indice lineare a partire dalla coppia riga/colonna (**`sub2ind`**)
- Vettorizzare la matrice ottenuta, creare una nuova matrice delle dimensioni originali e inserire al suo interno gli elementi della matrice vettorizzata



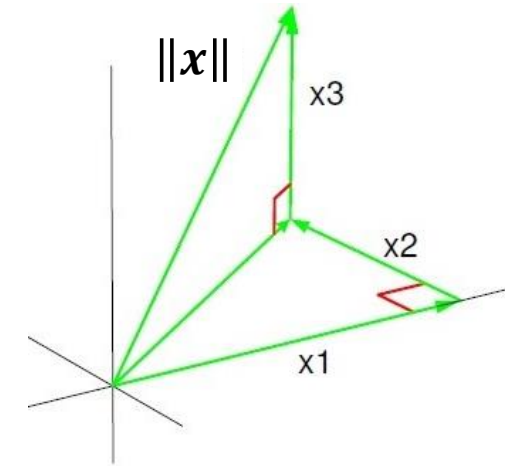
## Ripasso: norme e distanze

### Norma euclidea

Sia  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  un vettore appartenente a  $\mathbb{R}^N$ .

Si definisce **norma euclidea** di  $\mathbf{x}$  lo scalare

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$$



### Norma p

In generale, la **norma p** di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  è uno scalare

$$\|\mathbf{x}\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_N|^p}$$

Notare i valori assoluti delle componenti, che servono per le norme dispari; per esempio, la norma 1 è la somma dei valori assoluti delle componenti.

### Distanza euclidea

Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori appartenenti a  $\mathbb{R}^N$ .

La distanza euclidea tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è la norma euclidea della loro differenza, ovvero lo scalare

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}$$



## Ripasso: dimensioni del prodotto matriciale

### Regole mnemoniche / di controllo per il prodotto tra matrici

1. Il prodotto tra matrici non è commutativo

$$AB \neq BA$$

2. Il prodotto tra matrici è definito (e, dunque, eseguibile) soltanto se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.

$$A_{3 \times 7} B_{7 \times 15} = W_{3 \times 15}$$

3. Una matrice che è il risultato di una sequenza di prodotti matriciali ha tante righe quante la prima matrice della moltiplicazione e tante colonne quante l'ultima.

$$A_{3 \times 7} B_{7 \times 15} C_{15 \times 6} D_{6 \times 4} = Z_{3 \times 4}$$



## ESERCIZIO 2 (svolto)

- Creare due vettori riga (v1 e v2):

$$v1 = [4 \quad 2 \quad 6] \text{ e } v2 = [3 \quad 15 \quad 7]$$

- Calcolare  $A = v1^T v2$
- Calcolare  $A1 = v1 v2^T$
- Calcolare la norma euclidea del vettore v1 seguendo la formula:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- Calcolare la norma del vettore v1 con la funzione **norm** e verificarne i risultati rispetto al punto precedente
- Estrarre dalla matrice A una sottomatrice B composta dalle ultime 2 colonne e dalla prima e ultima riga di A

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 & 28 \\ 6 & 30 & 14 \\ 18 & 90 & 42 \end{bmatrix}$$



## Ripasso: autovettori e autovalori (1 di 2)

### Definizioni

Sia  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  una matrice quadrata di  $N$  righe e  $N$  colonne.

Se esistono un vettore  $x \in \mathbb{R}^N$  e uno scalare  $\lambda$  (anche complesso) tali che

$$Ax = \lambda x$$

si dice che  $x$  è **autovettore** di  $A$  e  $\lambda$  il suo **autovalore** corrispondente.

### Polinomio caratteristico

Trovare autovettori e autovalori è equivalente a risolvere il seguente sistema lineare (basta portare tutto a sinistra nell'equazione della definizione)

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Gli autovalori (eventualmente complessi) sono gli zeri del determinante di  $A - \lambda I$ .



## Ripasso: autovettori e autovalori (2 di 2)

### Ricerca degli autovalori a partire dal polinomio caratteristico

Il determinante di  $A - \lambda I$  è il **polinomio caratteristico** di  $A$  e si scrive

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Gli autovalori di  $A$ , quindi, si ricavano risolvendo l'equazione

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Se  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $p(\lambda)$  è un polinomio di grado  $N$  in  $\lambda$ , ovvero la somma delle molteplicità (= quante volte annullano il polinomio) delle sue soluzioni (reali o complesse coniugate) è  $N$ .



## Ripasso: invertibilità

### Definizione

Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  si dice singolare se il suo determinante è nullo.

Una matrice non singolare è invertibile.

**Le seguenti affermazioni (e diverse altre) sono equivalenti al concetto di invertibilità.**

- Il determinante di  $A$  non è nullo, cioè  $\det(A) \neq 0$ .
  - Conseguenza: 0 non è un autovalore di  $A$ ; altrimenti si avrebbe che  $p(0) = \det(A - 0I) = \det(A) = 0$ .
- Il rango di  $A$  (= numero di righe e/o colonne linearmente indipendenti) è uguale alla dimensione di  $A$  (in questo caso  $N$ )
- Esiste una matrice  $B$  tale che  $AB = BA = I$ ; in quel caso scriviamo che  $A^{-1} := B$  è la matrice inversa di  $A$ .

*NB: solo le matrici quadrate possono essere o non essere invertibili. Per le matrici rettangolari si fa riferimento al concetto di pseudo-invertibilità, che riprenderemo quando parleremo di principal component analysis (PCA).*



## ESERCIZIO 3 (proposto, continua alla slide successiva)

- Si creino 2 matrici 4x4

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 & 3 \\ -8 & -9 & -10 & 5 \\ 9 & -6 & -10 & 3 \\ 10 & -3 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & 4 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Si calcoli il rango di entrambe le matrici (**rank**)
- Si calcolino gli autovalori di entrambe le matrici (**eig**)
- Si calcoli  $D = A * \text{inv}(A)$
- Si verifichi la differenza di utilizzare l'operatore / o \ per il calcolo dell'inversa:  
 $D = A * \text{inv}(A)$  è equivalente a  $D = A / A$ ?
- Si calcoli  $E = \text{inv}(A) * B$  con la dicitura standard e l'operatore \ e se ne verifichi l'equivalenza
- Si calcoli il prodotto elemento per elemento  $F = A .* B$
- Verificare che è diverso dal prodotto matriciale  $A * B$



### ESERCIZIO 3 (proposto, continuazione)

- Trovare sia l'indice che le coppie riga/colonna di ogni elemento negativo della matrice F appena calcolata
- Cercare il massimo e il minimo della matrice A (suggerimento, vettorizzare la matrice) e trovarne l'indice lineare e le coppie/riga colonna
- Provare a ripetere l'operazione precedente non vettorizzando la matrice

### ESERCIZIO 4 (proposto)

- Generare i seguenti vettori discreti
  - Intervallo j1 [0,50] con passo 1 (si usi l'operatore : )
  - Intervallo j2 [0,50] con passo 0.5 (si usi l'operatore : )
  - Intervallo j3 [501,1000] con passo 0.5, utilizzando la funzione **linspace**
  - Concatenare per righe j1 e j3 facendo uso delle parentesi quadre o della funzione **horzcat**, nominando il nuovo intervallo "spezzato" j4
  - Intervallo j5 [1,100] con 10 punti e spaziatura logaritmica (**logspace**)