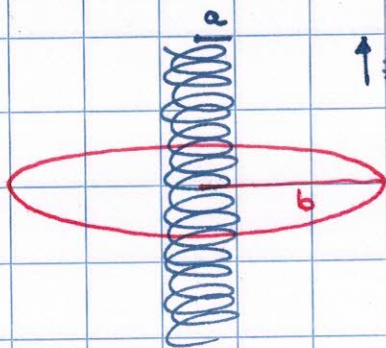


Griffiths. Problem 8.9



a) $\vec{B}_{sol} = \mu_0 n I_s \hat{z}$

$$\Phi_{spira}(\vec{B}_{sol}) = \mu_0 n I_s \pi a^2$$

$$\mathcal{E}_{spira} = - \frac{d\Phi_{spira}}{dt} = - \mu_0 n \pi a^2 \frac{dI_s}{dt}$$

$$\mathcal{R} I_{spira} = - \frac{1}{R} \mu_0 n \pi a^2 \frac{dI_s}{dt}$$

b) Per calcolare l'energia che fluisce dal solenoide alla spira calcoliamo il vettore di Poynting in prossimità (esterna) del solenoide. Calcoliamo quindi $E(r)$ con $r \gg a$ ma la sorgente di E è proprio il B_{sol} che varia, infatti si calcola

$$\oint_{\Gamma(a)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = - \pi a^2 \mu_0 n \frac{dI_s}{dt}$$

$$2\pi a \cdot E = - \pi a^2 \mu_0 n \frac{dI_s}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \frac{\mu_0}{2} a n \frac{dI_s}{dt} \hat{\phi}$$

B fuori dal solenoide è dato dalla spira.

Essendo per ipotesi $b \gg a$ possiamo dire che il solenoide si trova in prossimità dell'asse della spira e quindi assumere che $B(r \gg a) \approx B(r=0)$

$$B_{spira}(r \gg a) \approx B_{spira}(r=0)$$

Il campo B in prossimità dell'asse di una spira di raggio b

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{spira}}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Posso ora calcolare

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

sulla superficie del solenoide.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2} a n \frac{dI_{sol}}{dt} \right) \left(\frac{\mu_0 I_{spira}}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \right) \hat{r}$$

Quindi se $\frac{dI_{sol}}{dt} < 0$ $\vec{S}$ è radiale uscente.

La potenza totale che fluisce dal solenoide è

$$P = \int_{\vec{S}_{sol}} \vec{S} \cdot d\vec{E} = 2\pi a \int_{-\infty}^{+\infty} S dz = -\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} n I_{spira} \frac{dI_{sol}}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$ si può calcolare ponendo ~~$z = b \sinh(y)$~~

allora $z = b \cdot \sinh(y) \rightarrow dz = b \cdot \cosh(y) dy$

$$b^2 + z^2 = b^2 (1 + \sinh^2(y)) = b^2 \cosh^2(y)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b \cdot \cosh(y) dy}{(b^2 \cosh^2(y))^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{b^2 \cosh^2 y} = \frac{1}{b^2} \cdot \tanh(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty}$$

$$= \frac{2}{b^2}$$

Da qui:

$$P = -\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} n I_{spira} \frac{dI_{sol}}{dt} \cdot \frac{2}{b^2} = -\mu_0 \pi a^2 n I_{spira} \frac{dI_{sol}}{dt}$$

$$R a \neq I_{spira} = -\frac{1}{R} \left(\mu_0 n \pi a^2 \frac{dI_{sol}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow P = R I_{spira}^2$$