

Elettrostatica

- Potenziale elettrostatico
- Campi elettrostatici

- Un anello sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua lunghezza. Calcolare il potenziale $V(x)$ sull'asse del disco a distanza x dal centro dell'anello.
 - $[V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+R^2)}}; E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}]$
- Un disco sottile di raggio R e' caricato con densita' superficiale di carica uniforme σ . Calcolare il potenziale $V(x)$ sull'asse del disco a distanza x dal centro del disco. Estendere il risultato al caso in cui x tende all'infinito e x tende a 0.
 - $[V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - |x|); E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\text{sgn}(x) - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right)]$
- Calcolare il potenziale elettrostatico prodotto da una regione di spazio uniformemente carica (densita' ρ) compresa tra due piani indefiniti paralleli posti a distanza $2a$.

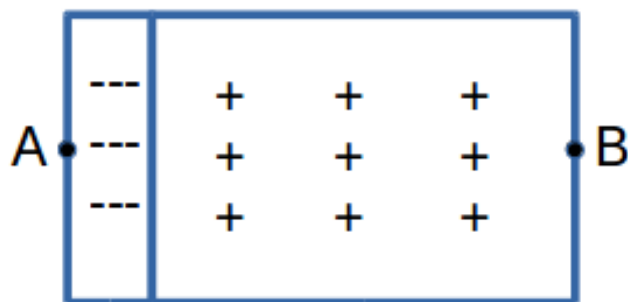
Potenziale elettrico di anello, disco, muro. Ex

Si consideri il sistema in figura: nella regione destra, di spessore $d_1 = 50 \mu\text{m}$ e' depositata una carica con densita' uniforme $\rho_1 = 0.1 \text{ C/m}^3$, in quella di sinistra, di spessore $d_2 = 10 \mu\text{m}$ e' depositata una carica ρ_2 tale per cui il sistema e' complessivamente neutro. Calcolare

1) il valore di ρ_2 C/m^3

2) La differenza di potenziale $V(B)-V(A)$ ai capi del sistema V

3) La velocita' minima che deve essere impressa ad un protone posto in A perche' esso possa attraversare la barriera m/s



Ex: giunzione pn

Sia data una superficie sferica uniformemente carica con densità di carica superficiale σ e raggio R .

Calcolare il potenziale $V(r)$ in tutto lo spazio.

Sia data una sfera uniformemente carica con densità di carica ρ e raggio R .

Calcolare il potenziale $V(r)$ in tutto lo spazio.

- Calcolare esplicitamente $V(0)$

Siano date due cariche Q e $-q$ (con $0 < q < Q$) poste a distanza d l'una dall'altra.

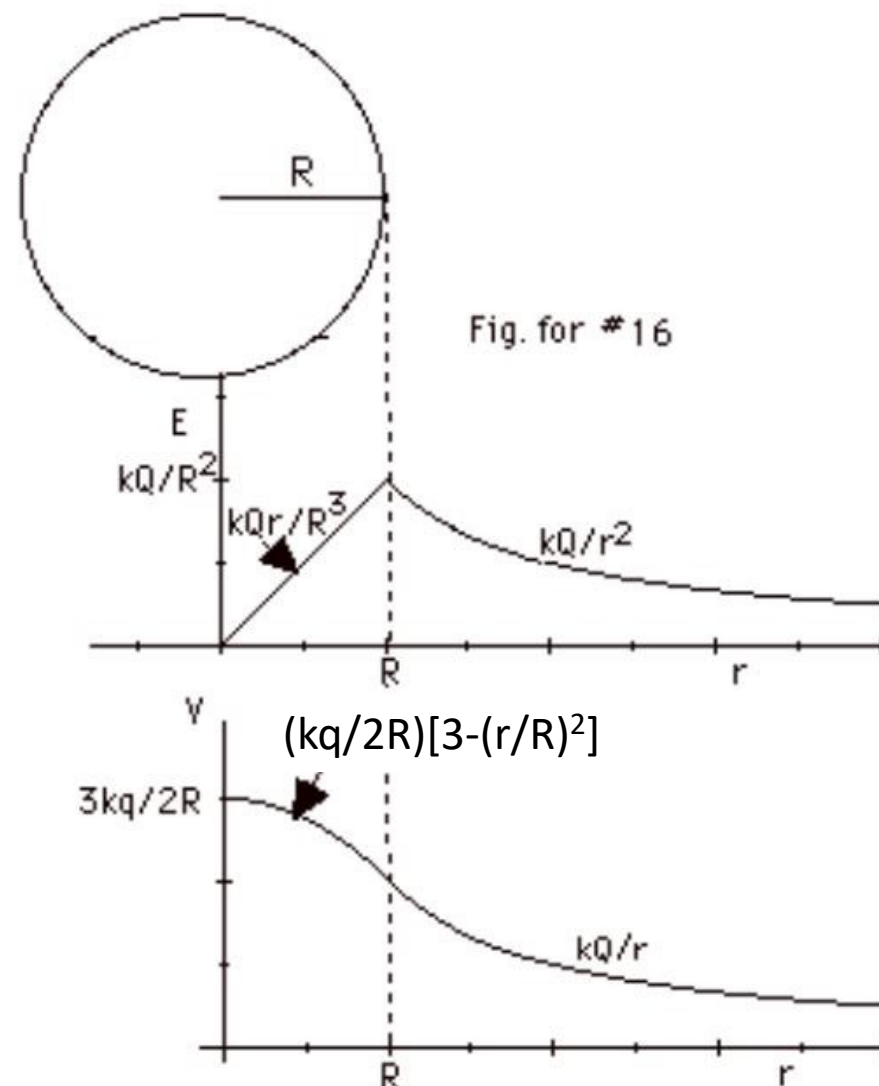
Assumendo che $V(\infty) = 0$, trovare (se esiste) la superficie per cui $V(x, y, z) = 0$

Superficie sferica e sfera uniformemente cariche

Sia data una sfera uniformemente carica con densita' di carica ρ e raggio R .

Calcolare il potenziale $V(r)$ in tutto lo spazio.

- Calcolare esplicitamente $V(0)$



Sfera uniformemente carica

1.21. *Due sfere di egual raggio R , cariche con densità spaziale uniforme ρ , una positiva e una negativa, sono parzialmente compenetrare così che i loro centri sono a distanza d minore di $2R$. Calcolare il campo elettrico nella zona comune ed estrapolare il risultato per $d \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$ in modo che il prodotto ρd resti costante.*

Nigro-Voci 1.21

- Due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a costituiscono un dipolo elettrico; si chiama momento del dipolo il vettore:

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

con $\vec{a}$ orientato dalla carica negativa alla carica positiva.

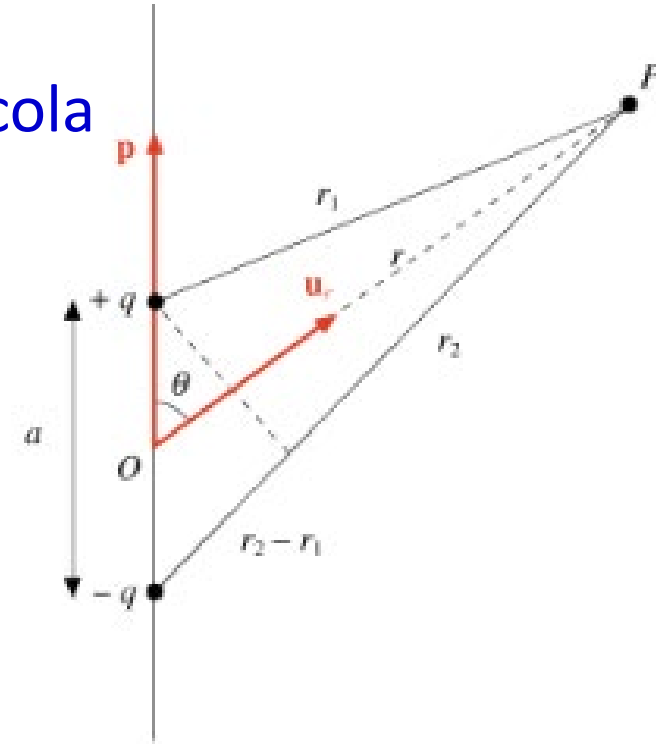
- Il potenziale in un punto P generato dal dipolo elettrico si calcola utilizzando la relazione $V(P) = \sum_{i=1}^N k \frac{q_i}{r_{i(P)}}$, in questo caso:

$$V(P) = kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = kq \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

- Se P è lontano dal dipolo ($r_{1,2} \gg a$) si può scrivere

$r_2 - r_1 = a \cos \theta$, $r_2 r_1 = r^2$. Quindi

$$V(P) = k \frac{qa \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} = k \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$



Dipolo elettrico

Alternativamente si poteva scrivere (teorema del coseno)

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 \mp ar \cos \theta}} = \frac{1}{r \sqrt{1 \mp \frac{a}{r} \cos \theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}}$$

E utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor ($r \gg a \Rightarrow x = \frac{a}{r} \cos \theta \ll 1$) delle funzioni

$$f_{1,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp x}} \simeq 1 \pm \frac{x}{2}$$

In cui si tralasciano i termini di ordine superiore al primo in $\frac{a}{r}$:

$$\begin{aligned} V(P) &= kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \simeq \frac{kq}{r} \left[\left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \right] = \frac{kqa \cos \theta}{r^2} \\ &= k \frac{p \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

Dipolo elettrico

- Il potenziale $V(P) = k \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$ dipende da $\vec{p}$ e non da q e $\vec{a}$ separatamente.
- Il potenziale $V(P) = k \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$ decresce come $1/r^2$, cio' e' dovuto al fatto che gli effetti delle due cariche di segno opposto si neutralizzano parzialmente.
- Vista al simmetria del sistema, per calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da un dipolo conviene utilizzare le coordinate sferiche con l'asse z parallelo e concorde a $\vec{p}$.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}\right) = k \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta, \sin \theta, 0)$$



Dipolo elettrico

$$\vec{E} = k \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta, \sin \theta, 0) = k \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \cdot \hat{r} + \sin \theta \cdot \hat{\theta})$$

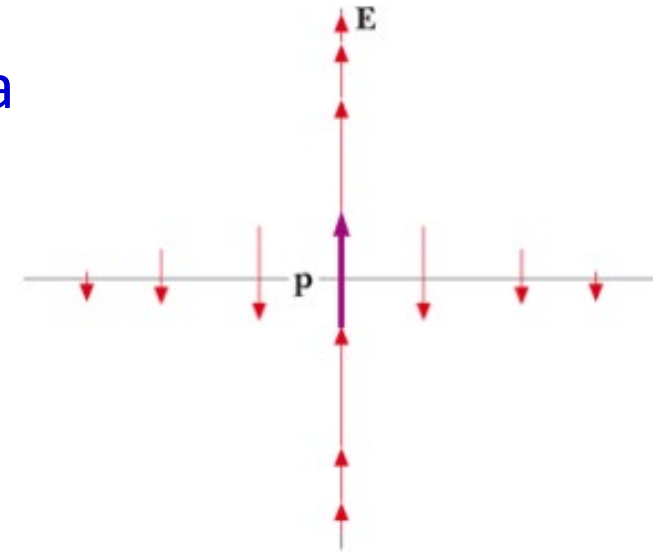
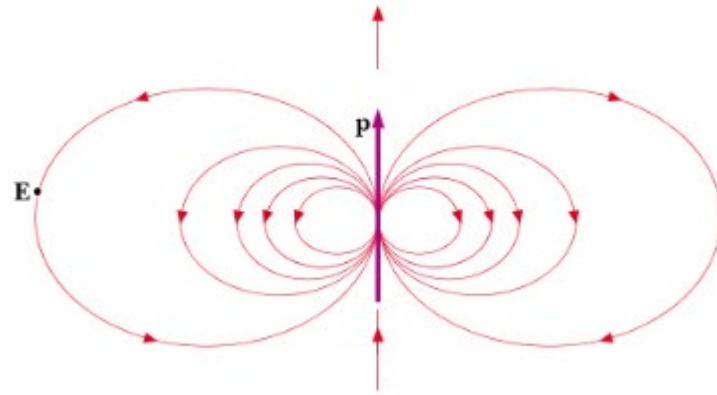
- Il campo $\vec{E}$ giace nel piano $\vec{p}, \hat{r}$.
- Lungo l'asse del dipolo ($\theta = 0$) il campo e' // e concorde a $\vec{p}$ e vale:

$$\vec{E} = k \frac{2\vec{p}}{r^3} \quad (\text{asse del dipolo})$$

- Nel piano mediano ($\theta = \pi/2$) il campo e' // a $\vec{p}$ e discorde. Va

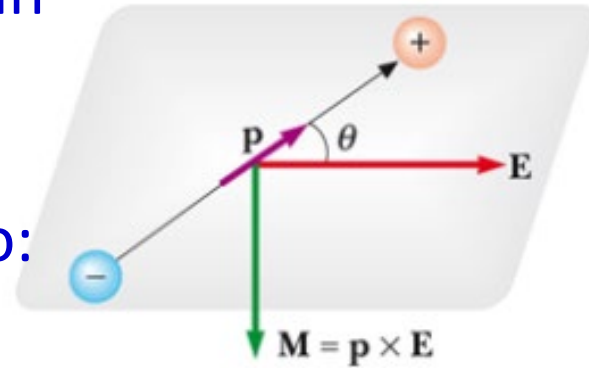
$$\vec{E} = -k \frac{\vec{p}}{r^3} \quad (\text{piano mediano})$$

- In generale:



Dipolo elettrico

- Consideriamo un dipolo elettrico di momento $\vec{p} = q\vec{a}$ immerso in un $\vec{E}$ statico e uniforme. Le due cariche $\pm q$ sentono due forze $\vec{F}_{1,2} = \pm q\vec{E}$ e quindi costituiscono una coppia di forze (=con risultante nulla) e momento torcente in generale $\neq 0$. Calcoliamo:



$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{a} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

- Il momento torcente tende a far ruotare il dipolo fino a portarlo // e concorde a $\vec{E}$, che e' una posizione di equilibrio (stabile).
- Il lavoro compiuto da $\vec{M}$ per una rotazione da θ_0 a θ e':

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

- Il segno “-” e' dovuto al fatto che M e' un momento di “richiamo” che si oppone alla deflessione $d\theta$. (Analogamente alla forza elastica $F=-k\Delta x$)
 - Si puo' verificare formalmente assumendo che i vettori $\vec{E} = (E, 0, 0)$ e $\vec{p} = (p_x, p_y, 0)$ giacciono sul piano xy , il vettore $\vec{M} = (0, 0, -pE \sin \theta)$

Forze su un dipolo elettrico

Il lavoro compiuto da $\vec{M}$ per una rotazione da θ_0 a θ e':

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = -pE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = pE(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

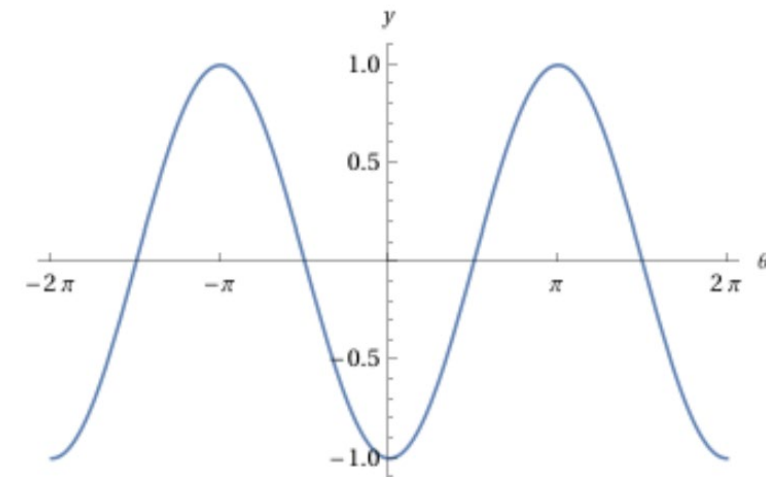
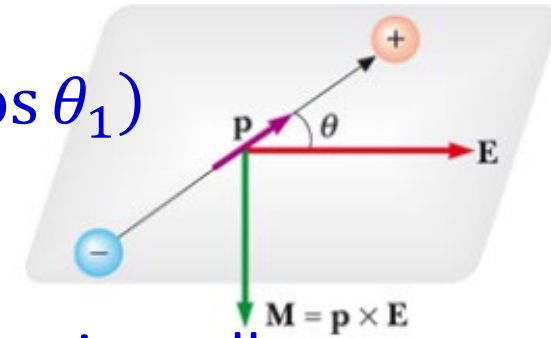
Questo lavoro dipende solo dall'angolo iniziale e da quello finale.

Possiamo quindi definire una energia potenziale ("rotazionale") associata alla posizione relativa tra campo $\vec{E}$ e momento di dipolo $\vec{p}$:

$$dW = -pE \sin \theta d\theta = -pE d(-\cos \theta) = -d(-pE \cos \theta) = -dU_e \Rightarrow$$

$$U_e = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Notiamo che U_e e' minima per $\theta = 0$, coerentemente con il fatto che il momento applicato sul dipolo tende ad allineare i vettori $\vec{p}$ ed $\vec{E}$. $\theta = 0$ e' infatti una configurazione di equilibrio stabile.



Forze su un dipolo elettrico

Se il campo $\vec{E}$ e' **non** uniforme, **oltre** al momento torcente $\vec{M}$ agisce anche una forza netta sul dipolo stesso $\vec{F}$.

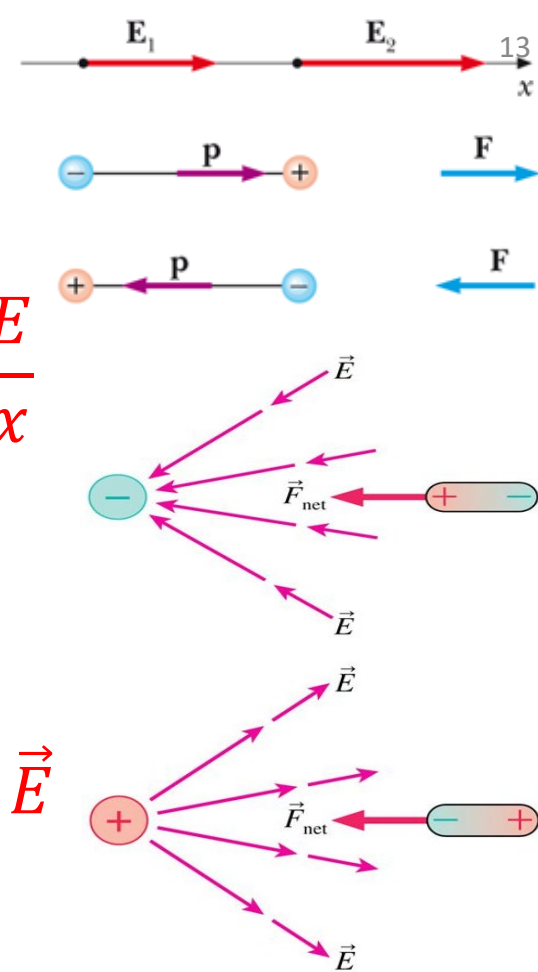
Se $\vec{p}$ e' orientato // a $\vec{E}$ (assumiamo $\vec{E}$ lungo $\hat{x}$) possiamo scrivere:

$$E(\vec{a}) - E(\vec{0}) \approx \frac{\partial E}{\partial x} a \Rightarrow \mathbf{F} = q \left[E(\vec{a}) - E(\vec{0}) \right] = q \frac{\partial E}{\partial x} a = \mathbf{p} \frac{\partial E}{\partial x}$$

Se $\vec{p}$ e' concorde con $\vec{E}$ (eq. rotazionale stabile) il dipolo sente una forza netta verso campi E piu' intensi (e.g. verso la carica)

In generale la forma della forza che agisce su un dipolo e':

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(\vec{a}) - \vec{E}(\vec{0}) \right) = q \left(\partial_x \vec{E} a_x + \partial_y \vec{E} a_y + \partial_z \vec{E} a_z \right) = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}$$



Dipolo in campo elettrico non uniforme

Se il campo e' elettrostatico (=conservativo) questa e' equivalente a:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

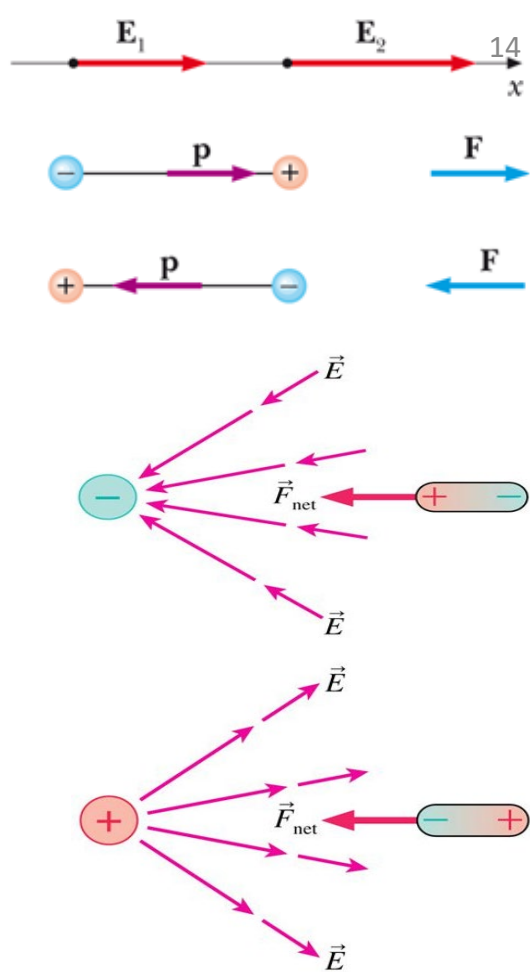
Puo' essere utile l'identita':

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

Se un dipolo si sposta all'interno di un campo elettrostatico non uniforme il lavoro eseguito dalla forza elettrostatica e':

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \left[\vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \right] \cdot d\vec{s} \Rightarrow (\text{per il teo del gradiente})$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \vec{p}_B \cdot \vec{E}(B) - \vec{p}_A \cdot \vec{E}(A)$$



Dipolo in campo elettrico non uniforme



Triboelettricità'

Un dipolo di momento $\vec{p}$ è immerso nel campo generato da una carica puntiforme positiva q_0 . Il dipolo è posizionato nel punto P dell'asse y con il momento parallelo a $\vec{E}$ oppure ortogonale a $\vec{E}$. Calcolare a quale forza è soggetto il dipolo nei vari casi.

Dipolo: Esempio 2.15 MNV (volume Fisica II)

Un dipolo di momento $\vec{p}$ è immerso nel campo generato da una carica puntiforme positiva q_0 . Il dipolo è posizionato nel punto P dell'asse y con il momento parallelo a $\vec{E}$ oppure ortogonale a $\vec{E}$. Calcolare a quale forza è soggetto il dipolo nei vari casi.

Soluzione

Il problema è un problema piano: se il dipolo ha il momento $\mathbf{p}$ nel piano y, z le forze stanno in tale piano. Per applicare le (2.71) ricorriamo alle (1.15) che nel nostro caso ($x = 0$) si scrivono

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Le derivate sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{q_0(-2y^2 + z^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5}, & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{-3q_0 y z}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{-3q_0 y z}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, & \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{q_0(y^2 - 2z^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \end{aligned}$$

Se il dipolo nel punto P ($y = r, z = 0$) ha il momento parallelo e concorde al campo, cioè se $p_x = 0, p_y = p, p_z = 0$, si trova

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{-2p q_0 y^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad F_z = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = \frac{-2p q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_y;$$

la forza è attrattiva, il dipolo si sposta verso l'origine. Se invece il dipolo è discorde al campo, $p_y = -p$ e la forza, eguale in modulo, è ora repulsiva.

Quando il dipolo è ortogonale a $\mathbf{E}$ e concorde all'asse z , $p_x = 0, p_y = 0, p_z = p$ e si trova

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = \frac{p q_0 y^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \Rightarrow \mathbf{F}_2 = \frac{p q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_z;$$

la forza è parallela e concorde all'asse z , cioè a $\mathbf{p}$. Se si rovescia $\mathbf{p}$ si rovescia anche la forza, che resta concorde a $\mathbf{p}$.

Si può scrivere nei due casi

$$\mathbf{F}_1 = \frac{-2q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}.$$

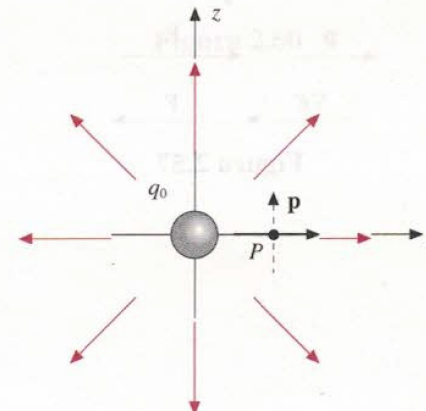
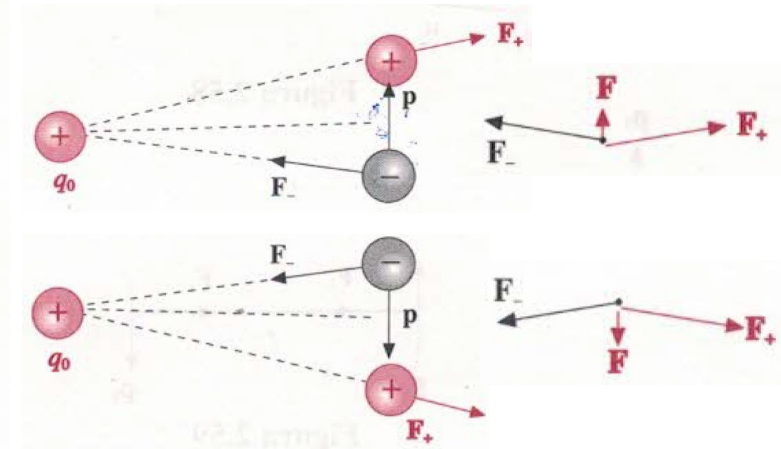


Figura 2.55



Dipolo: Esempio 2.15 MNV (volume Fisica II)

Calcolare l'energia di interazione tra due dipoli

Puo' essere utile (dimostrare)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{p}})$$

Energia tra due dipoli