

Interferenza da lamina, coefficienti di riflessione.

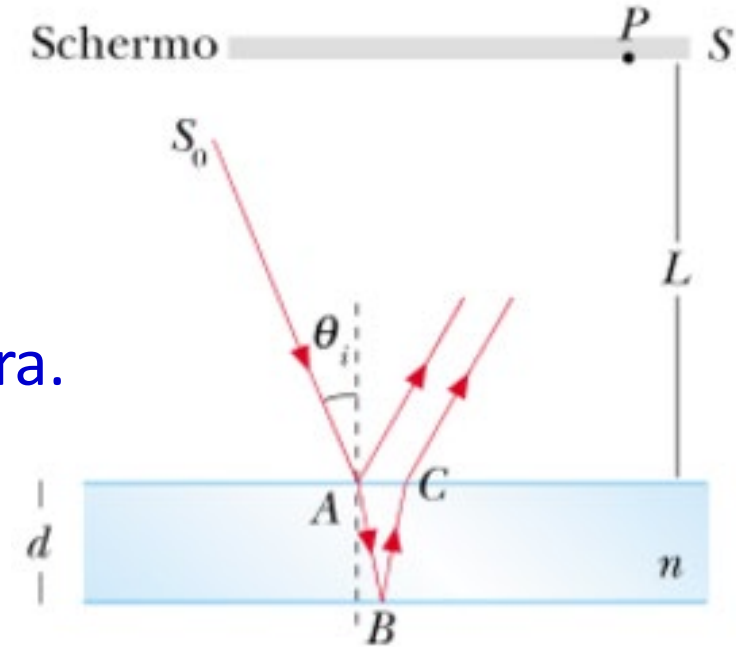
Interferenza con N sorgenti

- Interferenza da lamina e cuneo
- Coefficienti di Fresnel, angolo di Brewster e polarizzazione per riflessione
- Interferenza da N sorgenti

L'interferenza dovuta alla riflessione della luce del sole sulle due superfici di una lamina sottile di una sostanza trasparente e' un fenomeno documentato da Boyle (1663) e, pochi anni dopo, da Newton.

- Tali effetti si osservano comunemente sugli strati sottili di olio sull'acqua, sulle bolle di sapone, sulla pellicola d'acqua lasciata dalla pioggia sui vetri di una macchina.

Supponiamo di volere osservare gli effetti prodotti dalla riflessione della luce proveniente da una sorgente S_0 su una lamina spessa d , formata da una sostanza trasparente di indice di rifrazione n , posta in aria, su uno schermo S posto ad una certa distanza L dalla lamina ed ad essa parallelo, figura.

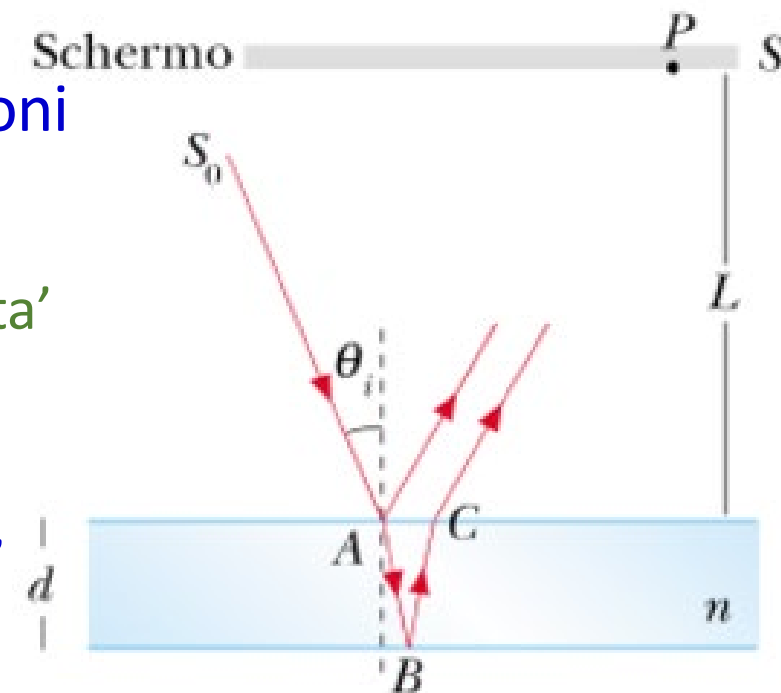


Interferenza da lamine

La luce che incide in A sulla superficie superiore della lamina con angolo d'incidenza θ_i da' origine in A ad un'onda riflessa ed un'onda trasmessa che si propaga nella lamina nella direzione θ_t , (legge di Snell); nel punto B della superficie inferiore della lamina l'onda trasmessa da' origine ad un'onda riflessa che riattraversa la lamina. Nel punto C della superficie superiore della lamina si ha la formazione di un'onda trasmessa in aria nella stessa direzione della prima onda riflessa e un'onda riflessa, da cui hanno origine, per riflessioni successive sulle due facce della lamina, altre onde.

- Ci si limita normalmente, come in figura, alle prime due onde, le onde successive, in base alle formule di Fresnel, hanno intensita' molto piccola rispetto alle prime due.

Le sorgenti virtuali originate dalla riflessione sulla prima e seconda superficie della lamina sono due sorgenti coerenti, ci aspettiamo sullo schermo S fenomeni analoghi a quelli dell'esperimento di Young.



Interferenza da lamine

La differenza di fase tra le due sorgenti e' dovuta alla **differenza di percorso delle due onde** e **dalla differenza di fase (π) prodotta dalla riflessione in A.**

I due raggi che partono dai punti C e H percorrono lo stesso cammino per giungere in P. Calcoliamo la differenza di cammino ottico delle due onde che nel punto A si dividono. Consideriamo prima l'onda che percorre ABC:

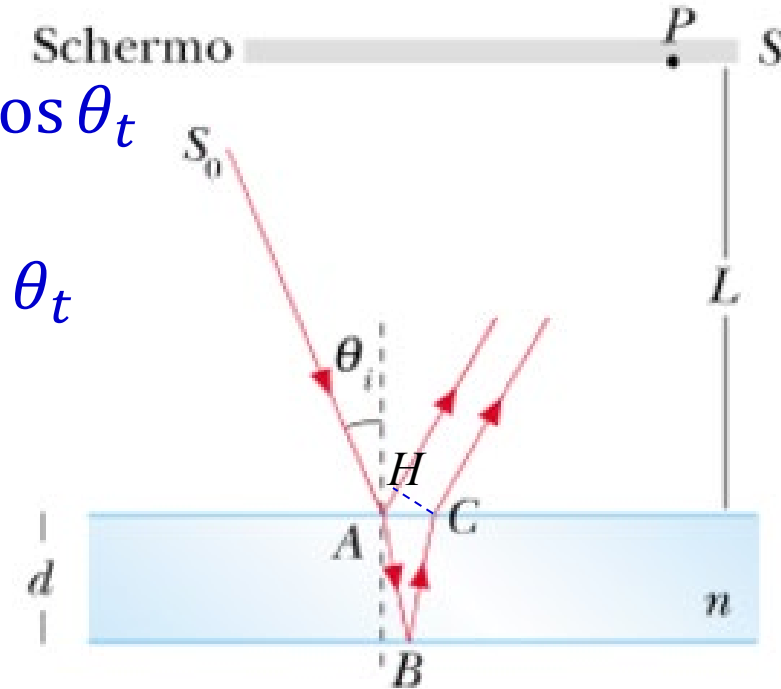
$$AB = d / \cos \theta_t \Rightarrow \Delta r_1 = ABC = 2d / \cos \theta_t$$

Lungo il percorso ABC ho un cambiamento di fase:

$$\Delta \phi_1 = k_n \Delta r_1 = kn \Delta r_1 = 2kdn / \cos \theta_t$$

Questo e' lo sfasamento totale per il percorso ABC:

$$\Delta \phi_{ABC} = \Delta \phi_1 = 2kdn / \cos \theta_t$$



Interferenza da lamine

Consideriamo ora l'onda che percorre AH:

$$\begin{aligned}\Delta r_2 &= AH = AC \sin \theta_i = 2d \tan \theta_t \sin \theta_i \\ &= 2d / \cos \theta_t \cdot \sin \theta_t \sin \theta_i = 2dn / \cos \theta_t \cdot \sin^2 \theta_t\end{aligned}$$

Lungo il percorso AH ho un cambiamento di fase:

$$\Delta \phi_2 = k \Delta r_2 = 2kdn / \cos \theta_t \cdot \sin^2 \theta_t$$

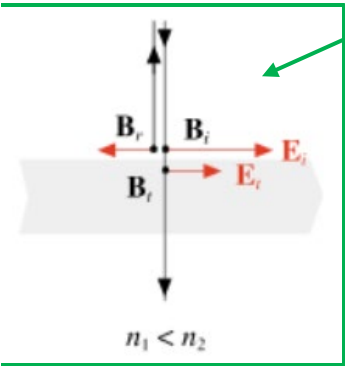
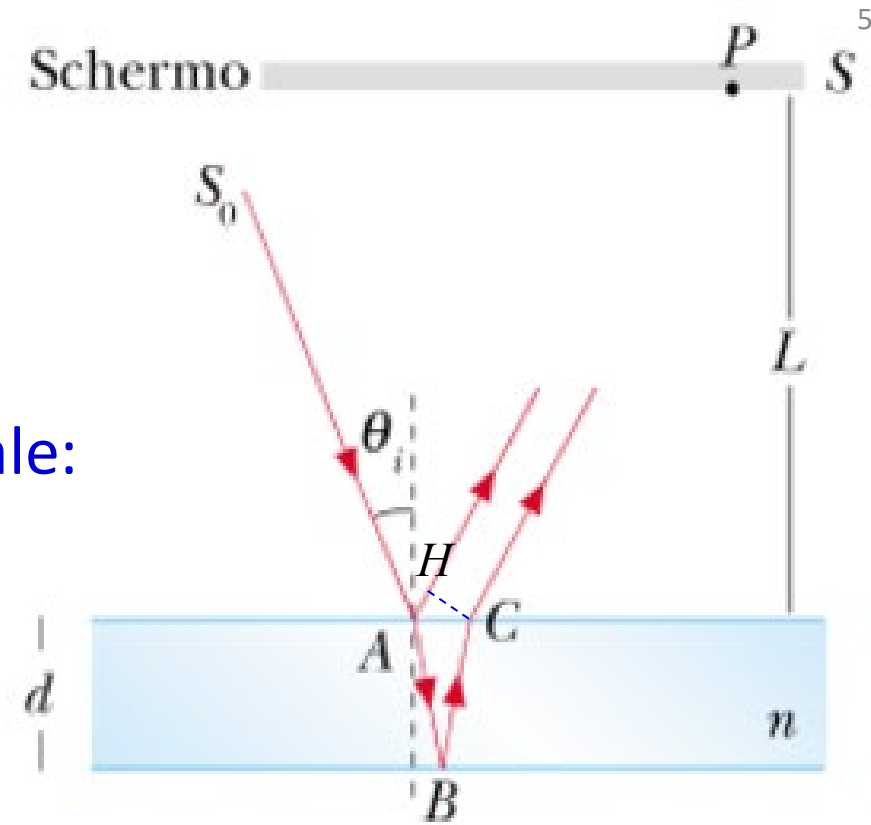
Al quale va aggiunto un salto di fase pari a π in A. In totale:

$$\Delta \phi_{AH} = \Delta \phi_2 + \pi$$

La differenza di fase tra le due onde e' quindi pari a:

$$\begin{aligned}\delta &= \Delta \phi_{ABC} - \Delta \phi_{AH} \\ &= 2kdn / \cos \theta_t - 2kdn / \cos \theta_t \cdot \sin^2 \theta_t - \pi\end{aligned}$$

$$\delta = 2kdn \cos \theta_t - \pi$$

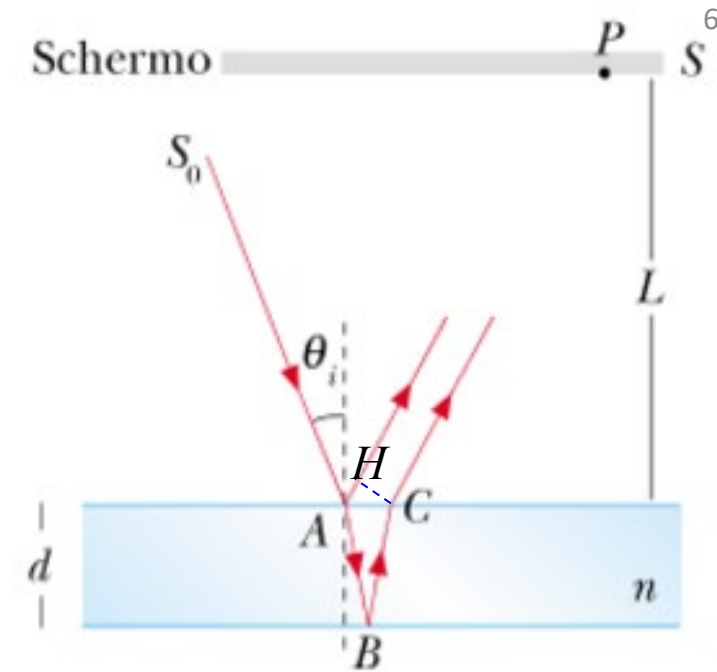


Interferenza da lamine

$$\delta = 2kdn \cos \theta_t - \pi$$

Se lo spessore d e l'angolo θ_i sono piccoli in modo che la distanza (h) tra le sorgenti virtuali sia piccola, le due sorgenti virtuali, sfasate di δ , dovrebbero dare origine sullo schermo posto a distanza $L \gg h$ dalla lamina ad un sistema di frange d'interferenza equispaziate, di passo p , analogo a quello osservato nell'esperimento di Young.

Se la sorgente e' estesa, come nel caso della luce solare, la distanza h tra le due sorgenti virtuali varia con θ_t . Per ciascun valore di θ_t si produrrà' sullo schermo un sistema di frange il cui passo p varia con θ_t . La sovrapposizione sullo schermo di tutti questi sistemi di frange **non** dà origine a fenomeni d'interferenza osservabili.

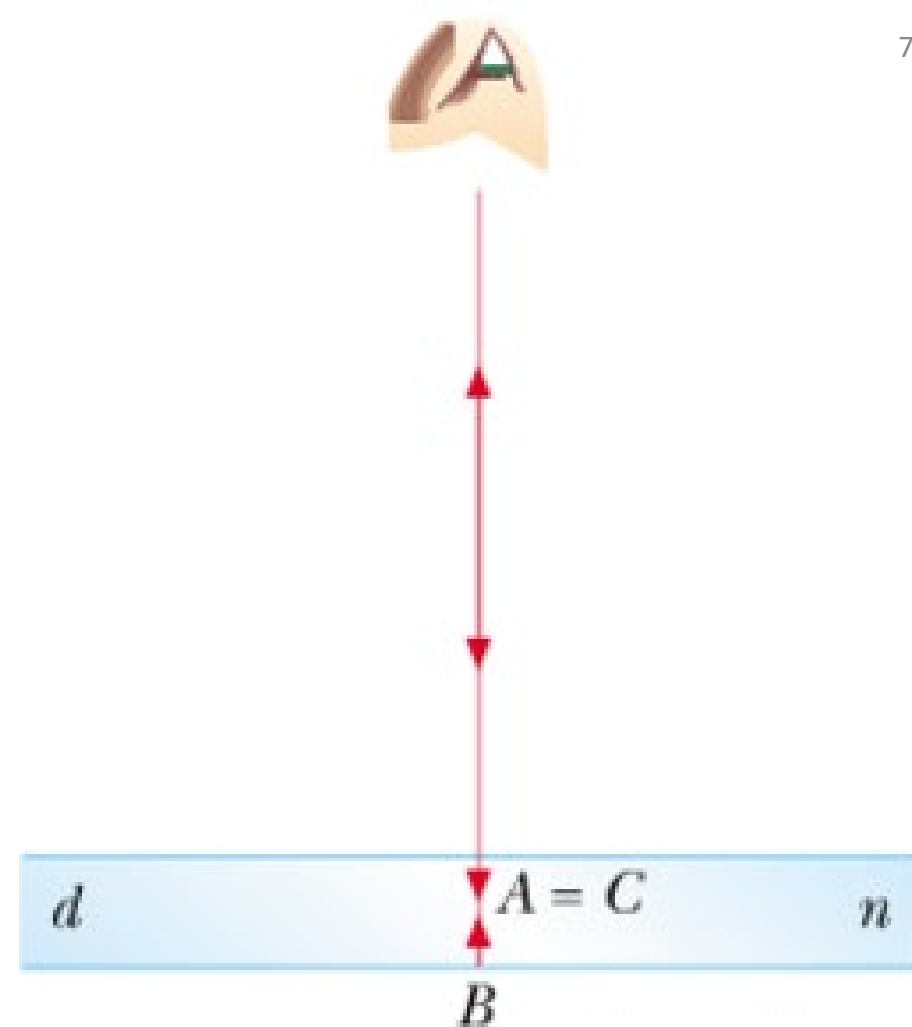


Interferenza da lamina

La situazione e' diversa se l'osservazione e' fatta direttamente sulla superficie superiore della lamina. Nell'ipotesi che lo spessore d e gli angoli θ_t siano abbastanza piccoli si dimostra che i diversi sistemi di frange hanno lo stesso passo p per cui risultano sovrapposti, con la conseguente formazione di un sistema di frange localizzato sulla superficie superiore della lamina e osservabile ad occhio nudo.

Dunque per incidenza della luce normale alla lamina, $\theta_t \cong 0$, $\cos \theta_t \cong 1$

$$\delta = 2kdn \cos \theta_t - \pi \cong \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi$$



Interferenza da lamine

$$\delta = 2kdn \cos \theta_t - \pi \cong \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi$$

L'interferenza in un punto P della superficie superiore della lamina, come nel caso dell'esperimento di Young, risulta **costruttiva** o **distruttiva** se:

$$\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi = 2m\pi \Rightarrow d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi = (2m + 1)\pi \Rightarrow d = m \frac{\lambda}{2n} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Queste relazioni sono valide anche se la lamina anziché essere immersa in aria, lo è in un altro mezzo: in ogni caso una delle due riflessioni avviene da un mezzo d'indice di rifrazione minore a uno con indice di rifrazione maggiore.

Interferenza da lamine

Costruttiva o distruttiva se:

$$\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi = 2m\pi \Rightarrow d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi = (2m + 1)\pi \Rightarrow d = m \frac{\lambda}{2n} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

E' interessante notare che allo spessore $d \ll \lambda/4 \cong 0$ corrisponde una condizione di minimo ($\delta \cong \pi$).

Si puo' infine osservare che in questo caso le sorgenti coerenti che determinano l'interferenza non sono separate lateralmente, come nell'esperimento di Young, ma sono separate in profondita': e' come se le due onde che interferiscono provenissero da due sorgenti virtuali S_1 e S_2 poste lungo la retta normale alla lamina coincidente con la direzione di osservazione.

Interferenza da lamine

ONDE Un fascio di luce laser di intensità $I=1 \text{ MW/m}^2$, potenza $P=100\text{W}$ e lunghezza d'onda $\lambda=550 \text{ nm}$ viene diviso in due fasci uguali. Ciascuno percorre il medesimo cammino ottico e illumina un oggetto che diffonde la luce isotropicamente in tutte le direzioni. I diffusori sono posti lungo l'asse x , a una distanza $d=1 \text{ m}$ l'uno dall'altro e ad una distanza $D=d=1 \text{ m}$ da uno schermo.

2.1) Calcolare il campo elettrico E della luce che incide su ciascuno dei diffusori.

2.2) Calcolare l'intensità I_c della luce al centro dello schermo.

2.3) I diffusori vengono avvicinati fino a che la distanza tra di essi si riduce a $d'=0.0141 \text{ m}$; calcolare in queste condizioni la distanza δx tra la posizione sullo schermo del massimo di interferenza centrale e quello immediatamente contiguo.

2.4) Si immerge uno dei diffusori in una sfera di materiale dielettrico (aerogel) con $n=1.03$ e raggio $r=1 \text{ mm}$. Calcolare il tratto δx_0 di cui si sposta sullo schermo il massimo centrale.

O.1) Il segnale si suddivide equamente tra i due fasci, quindi ciascuno di questi ha un'intensità $I_f = I/2 = 0.5 \text{ MW/m}^2$. Perciò il valore di ciascun

campo e': $E = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = 19.3 \text{ KV/m}$

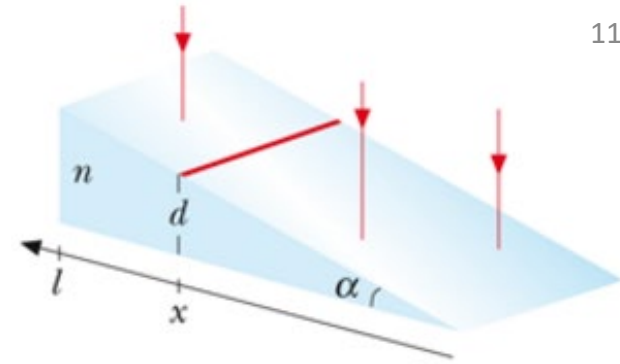
O.2) Ciascun diffusore emana un'onda sferica con potenza $P_o = P/2 = 50 \text{ W}$. L'intensità al centro dello schermo che si avrebbe con un solo diffusore sarebbe dunque: $I_o = P/(4\pi(D^2 + d^2/4)) = 3.2 \text{ W/m}^2$. Poiché al centro ho un massimo di interferenza l'intensità complessiva è $I_C = 4I_o = 12.7 \text{ W/m}^2$.

Compitino, Dicemb

O.3) $\delta x = D \tan \theta_1 - D \tan \theta_0 \simeq D(\sin \theta_1 - \sin \theta_0) = D \frac{\lambda}{d} = 39 \mu\text{m};$

O.4) La sfera introduce uno sfasamento (intrinseco) $\delta = 2rK(n-1)$; il massimo centrale si sposta sull'angolo definito dalla relazione $Kd \sin \theta'_0 = 2rK(n-1)$, e quindi $\delta x_0 = D \tan \theta'_0 \simeq D(\sin \theta'_0) = \frac{D}{d} 2r(n-1) = 4.25 \text{ mm}$

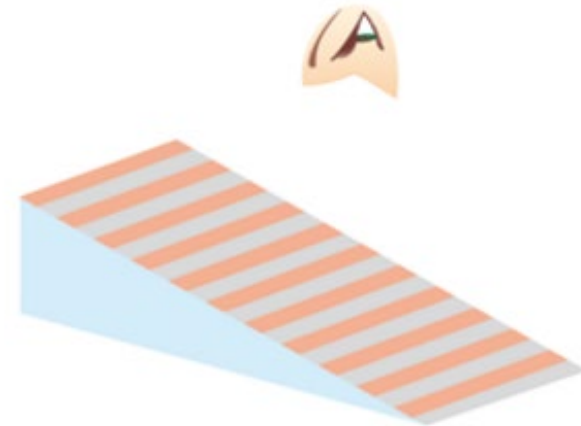
Si chiama **cuneo** una lamina trasparente a facce piane, ma formanti un certo angolo α , che supponiamo piccolo. Ad ogni punto del cuneo distante x dall'estremo dove lo spessore e' nullo e' associato uno spessore $d=\alpha x$, per cui il cuneo si puo' considerare come una lamina con spessore variabile con continuita' da zero a αl , figura.



Illuminiamo il cuneo con una sorgente estesa in incidenza quasi normale e osserviamo la luce riflessa. Quando si fissa un punto del cuneo si possono utilizzare le

$$d_{max} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n} \Rightarrow x_{max} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n\alpha} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$d_{min} = m' \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow x_{min} = m' \frac{\lambda}{2n\alpha} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

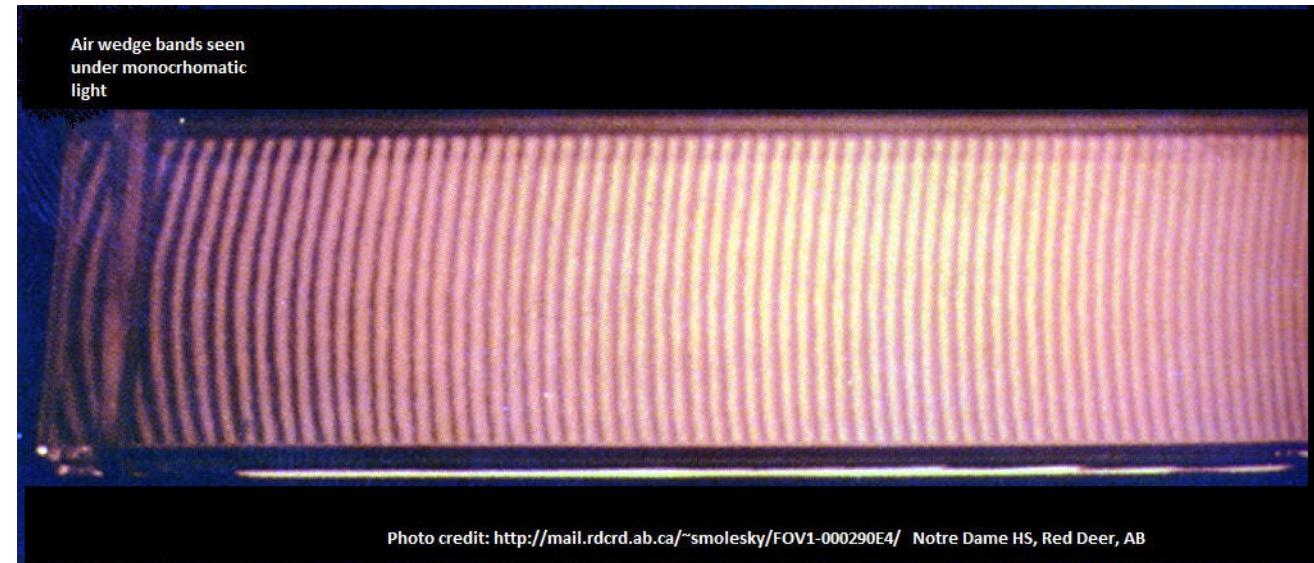


Cuneo sottile

$$d_{max} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n} \Rightarrow x_{max} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n\alpha} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$d_{min} = m' \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow x_{min} = m' \frac{\lambda}{2n\alpha} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

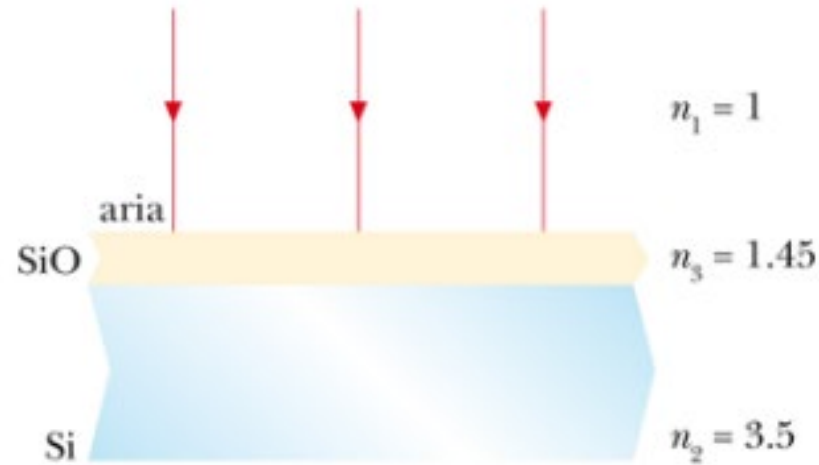
I luoghi dei punti $d=\text{costante}$, con intensita' costante, sono segmenti paralleli ai bordi del cuneo. Si vede quindi sulla superficie del cuneo una successione di frange chiare e scure, dette **frange localizzate di eguale spessore**, in quanto ogni frangia e' caratterizzata da un valore di d . Il bordo del cuneo dove $d = 0$ e' nero, cioe' la prima frangia e' scura, a conferma del fatto che nella riflessione ad una delle due superficie c'e' uno sfasamento di π .



Cuneo sottile

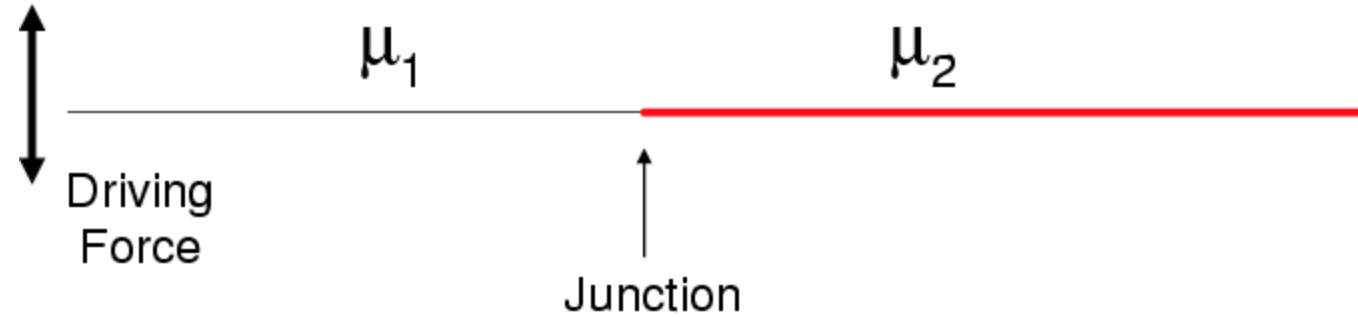
Le celle solari di silicio hanno indice di rifrazione $n_2=3.5$ e vengono ricoperte con una pellicola sottile di SiO, con indice di rifrazione $n_3=1.45$, per rendere minime le perdite per riflessione.

Calcolare lo spessore minimo d dell'ossido in grado di produrre riflessione minima alla lunghezza d'onda $\lambda_G=550\text{ nm}$, cioè nel massimo dello spettro solare.



Interferenza da lamine. Rivestimenti antiriflettenti

Prima di proseguire con lo studio delle onde EM vediamo cosa succede ad un impulso che si propaga su una corda composta da due parti di densita' differente



La velocita' di propagazione delle onde nelle due parti e' differente essendo

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

con T tensione e μ densita' lineare della corda.

Onde riflesse e trasmesse in una corda

La velocità di propagazione delle onde nelle due parti è differente essendo

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

con T tensione e μ densità lineare della corda.

All'interfaccia tra le due parti, dove c'è discontinuità di v l'impulso viene parzialmente riflesso e parzialmente trasmesso. Il comportamento dell'impulso riflesso dipende da v_1 e v_2 nei due mezzi. Qualitativamente:

- Se $v_1 > v_2$ l'impulso è riflesso e «invertito» (la sua fase cambia di π)
- Se $v_1 < v_2$ l'impulso è riflesso ma la sua fase non cambia

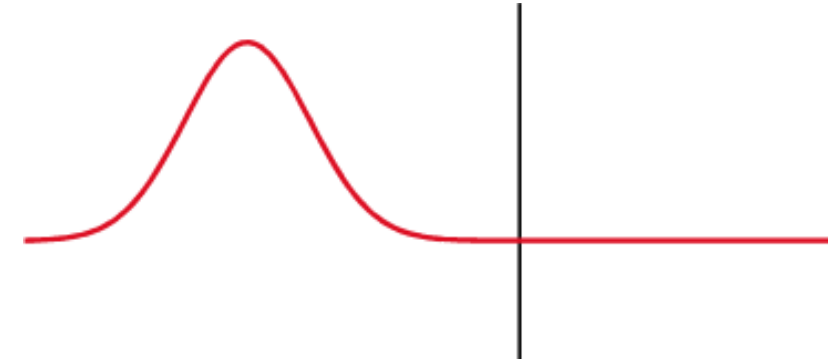


- L'impulso trasmesso ha sempre la stessa fase di quello incidente

Onde riflesse e trasmesse in una corda

Vediamo quantitativamente cosa succede se un'onda armonica si propaga su una corda con densita' discontinua. Le tre onde, incidente, riflessa e trasmessa hanno equazioni:

- $y_{inc}(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega t)$
- $y_{ref}(x, t) = B \cos(k_1 x + \omega t)$
- $y_{trans}(x, t) = C \cos(k_2 x - \omega t)$



Scegliamo di porre la discontinuita' della corda a $x=0$ per comodita'.

- $x \leq 0: y_1(x, t) = y_{inc}(x, t) + y_{ref}(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega t) + B \cos(k_1 x + \omega t)$
- $x \geq 0: y_2(x, t) = y_{trans}(x, t) = C \cos(k_2 x - \omega t)$

In $x = 0$ la funzione che descrive l'onda deve essere continua e derivabile:

$$y_1(0, t) = y_2(0, t) \text{ e } [\partial_x y_1(x, t)]_{x=0} = [\partial_x y_2(x, t)]_{x=0}$$

Onde riflesse e trasmesse in una corda

$$y_1(0, t) = y_2(0, t) \text{ e } [\partial_x y_1(x, t)]_{x=0} = [\partial_x y_2(x, t)]_{x=0}$$

Le due equazioni porgono

$$A + B = C \text{ e } A - B = \frac{k_2}{k_1} C$$

Quindi $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right) C$ e $B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) C$. Possiamo definire:

- coefficiente di riflessione $r = \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$
- coefficiente di trasmissione $t = \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

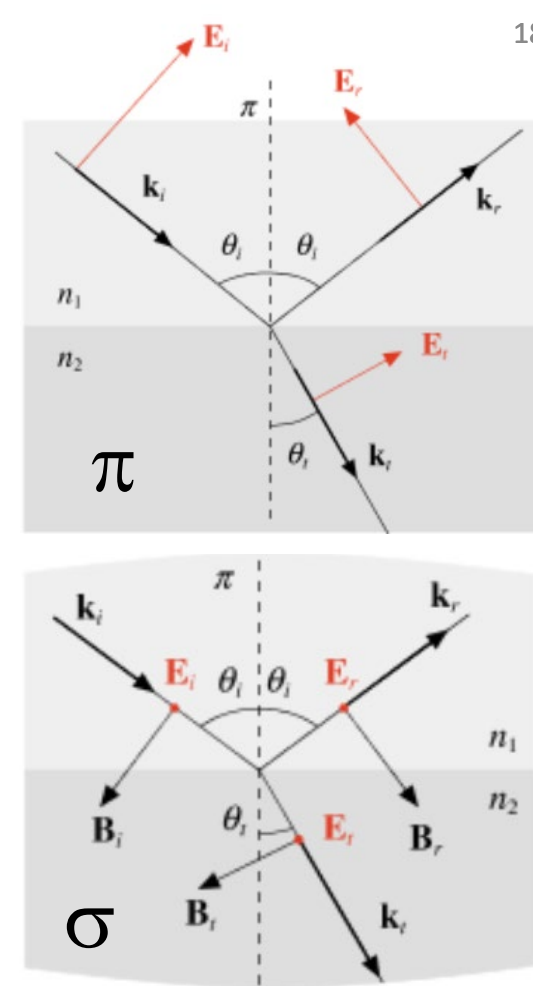
Notiamo che:

- se $k_1 > k_2$ ($v_1 < v_2$) l'onda incidente e l'onda riflessa hanno la stessa fase (A e B hanno lo stesso segno)
- se $k_1 < k_2$ ($v_1 > v_2$) l'onda incidente e l'onda riflessa hanno fase opposta, sono quindi **sfasate di π** (A e B hanno segno opposto)
- **Onda incidente e trasmessa sono sempre in fase**

Onde riflesse e trasmesse in una corda

Abbiamo visto le relazioni tra le direzioni dell'onda em riflessa e quella trasmessa rispetto alla direzione dell'onda incidente. Queste relazioni non dipendono dalle loro intensita'.

Le equazioni di Maxwell forniscono le relazioni tra le ampiezze dell'onda riflessa E_r e dell'onda trasmessa E_t e l'ampiezza dell'onda incidente E_i . Tali relazioni risultano diverse a seconda che la luce incidente sia polarizzata nel piano d'incidenza π , figura in alto, o nel piano σ perpendicolare al piano d'incidenza, figura in basso.



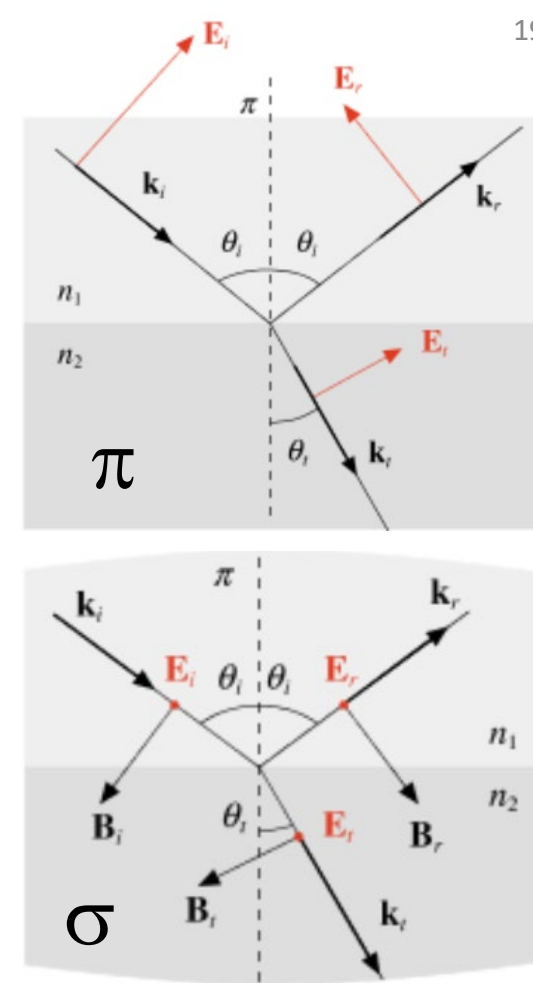
Intensita' delle onde riflesse e trasmesse

Detto $E_i = E_{0i} \sin(k_i r - \omega t)$ il campo elettrico dell'onda incidente che si propaga lungo il vettore $\vec{k}_i$ e $E_r = E_{0r} \sin(k_r r - \omega t)$ il campo elettrico dell'onda riflessa (lungo il vettore $\vec{k}_r$) le equazioni di Maxwell forniscono le seguenti relazioni:

$$r_\pi = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_\pi = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_\sigma = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_\sigma = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

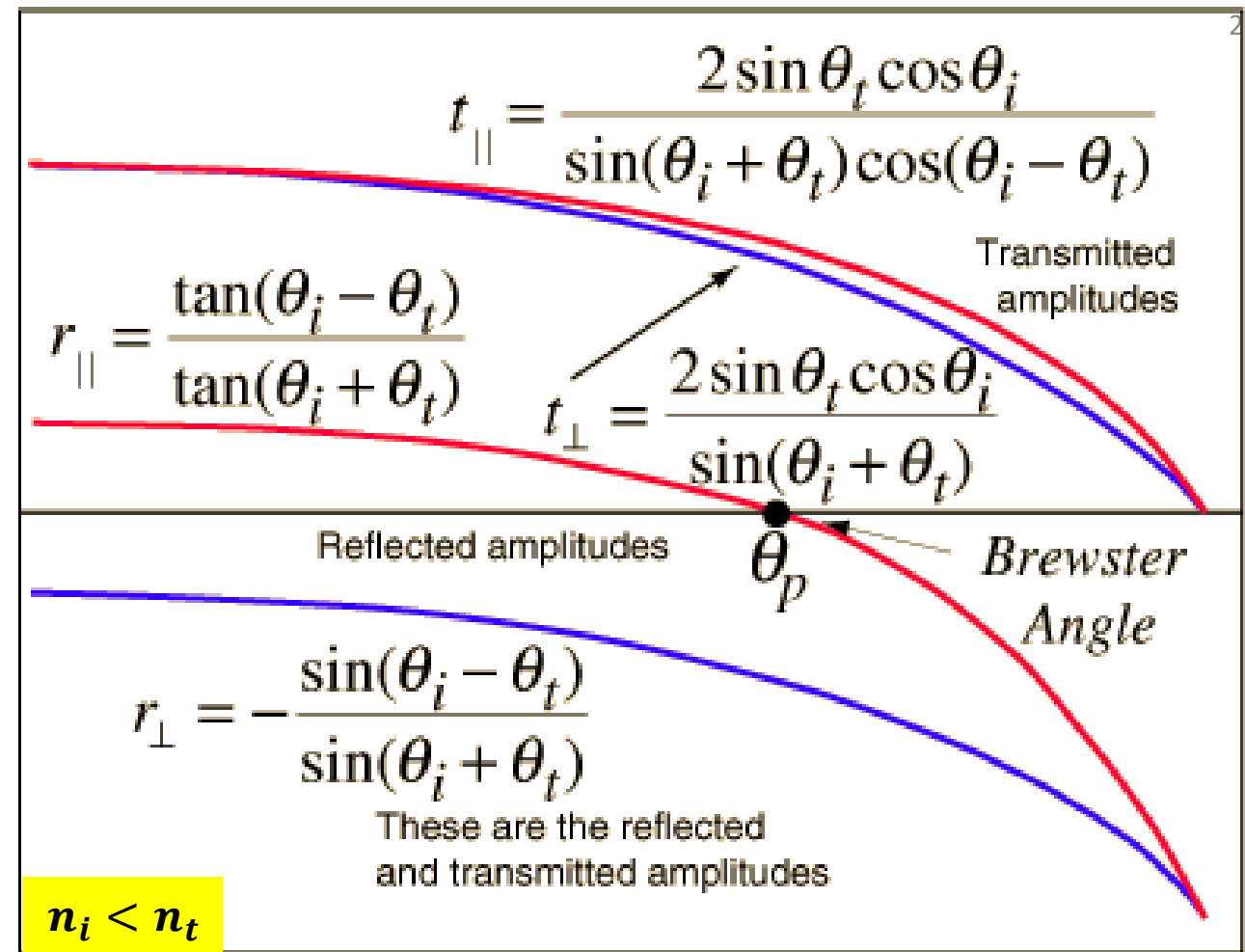
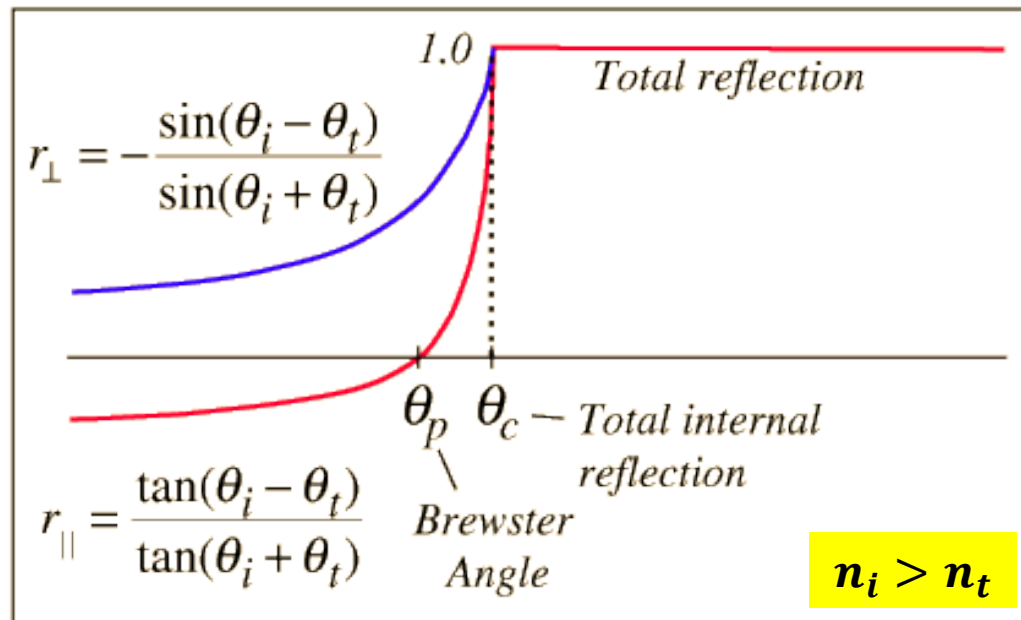
tra l'ampiezza dell'onda riflessa e quella dell'onda incidente nei due casi.



Ampiezze dei campi delle onde riflesse e trasmesse

$$r_{\pi} = r_{||} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\pi} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_{\sigma} = r_{\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\sigma} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$



Ampezze dei campi delle onde riflesse e trasmesse

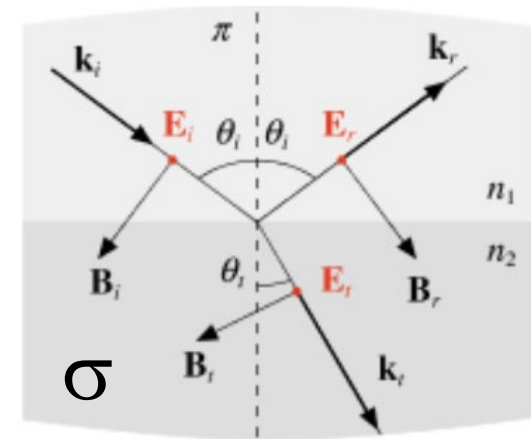
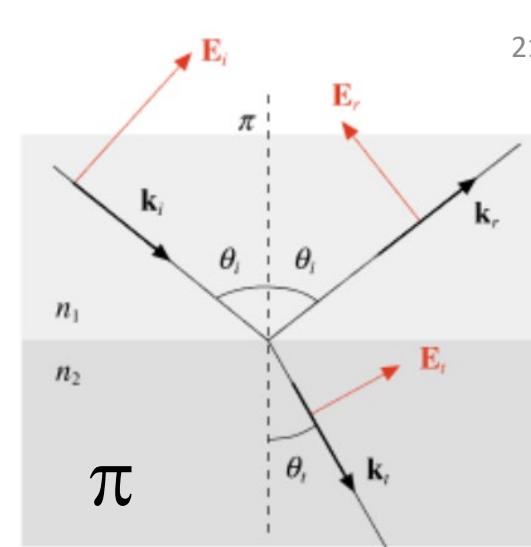
L'intensità dell'onda incidente e dell'onda riflessa sono date rispettivamente da $I_i = c\varepsilon_0 E_{0i}^2/2$ e $I_r = c\varepsilon_0 E_{0r}^2/2$ per cui i rapporti

$$R_\pi = \left(\frac{I_r}{I_i}\right)_\pi = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\pi^2 = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$R_\sigma = \left(\frac{I_r}{I_i}\right)_\sigma = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\sigma^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

forniscono la percentuale di energia (quindi della potenza) riflessa nei due casi. I coefficienti R_π e R_σ prendono nome di **coefficienti di riflessione di Fresnel**.

I coefficienti R_π e R_σ sono funzioni dell'angolo d'incidenza θ_i in quanto, per ogni θ_i , l'angolo di rifrazione θ_t si ricava dalla legge di Snell.

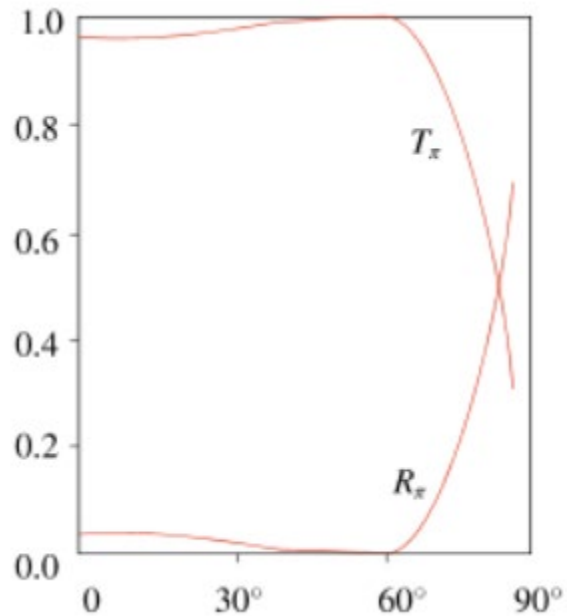


Intensità delle onde riflesse e trasmesse

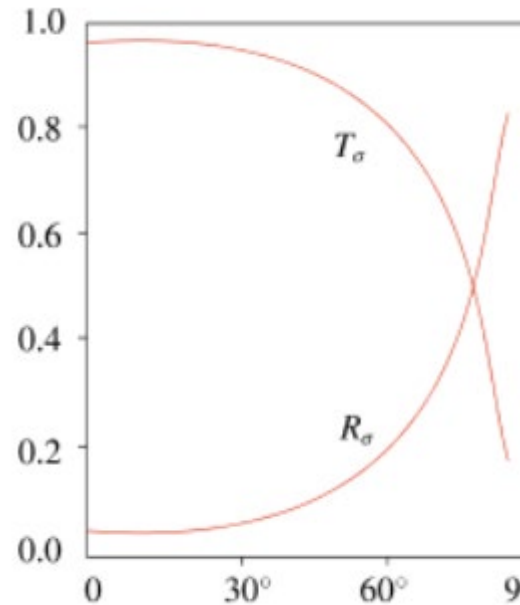
Per il vetro, $n=1.5$, $R_\pi(\theta_i)$ e $R_\sigma(\theta_i)$ sono riportati in figura a lato.

L'energia, e quindi la potenza, che non e' riflessa viene trasmessa e si definiscono, in corrispondenza a R_π e R_σ , i due coefficienti di trasmissione T_π e T_σ . Per il principio di conservazione dell'energia

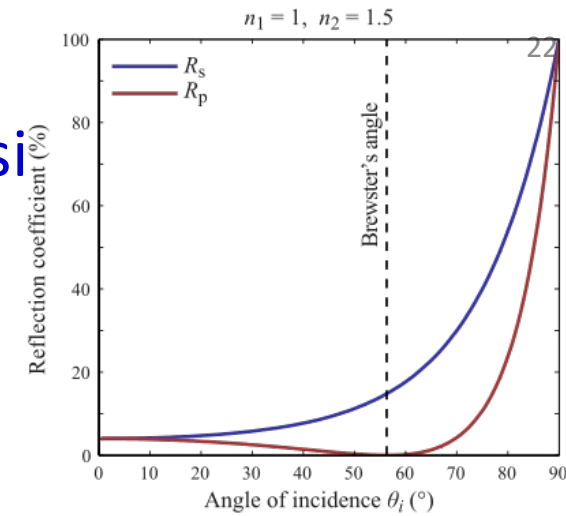
$$T_\pi = 1 - R_\pi \quad , \quad T_\sigma = 1 - R_\sigma$$



← Andamento coefficiente di trasmissione e riflessione per onda polarizzata nel piano di incidenza nel caso di aria-vetro (1.0-1.5)



← Andamento coefficiente di trasmissione e riflessione per onda polarizzata ortogonalmente al piano di incidenza nel caso di aria-vetro (1.0-1.5)



Intensita' delle onde riflesse e trasmesse

Poniamo attenzione al fatto che se:

$$R = r^2$$

NON vale la stessa relazione per l'intensità trasmessa. Infatti in generale

$$I_i \neq I_r + I_t$$

poiché quello che si conserva è l'energia (e quindi la potenza).

$$P_i = P_r + P_t$$

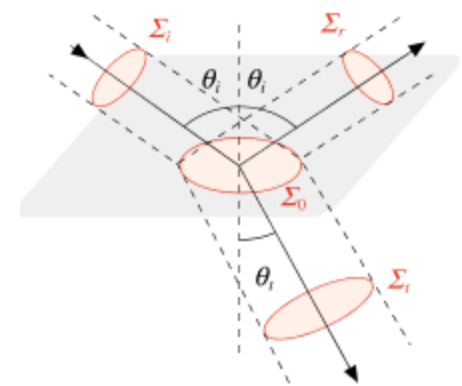
Il raggio trasmesso viene deviato rispetto all'incidente la sezione del fascio trasmesso è in generale diversa da quello incidente (che è uguale a quello riflesso). Valgono in generale:

$$R = r^2 \quad (\text{sia per polarizzazione } \pi \text{ che } \sigma)$$

$$R + T = 1 \quad (\text{sia per polarizzazione } \pi \text{ che } \sigma)$$

$$T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t^2 \quad (\text{sia per polarizzazione } \pi \text{ che } \sigma)$$

I coefficienti $r = (E_0^r / E_0^i)$ e $t = (E_0^t / E_0^i)$ dipendono dalla polarizzazione dell'onda incidente.



Intensità delle onde riflesse e trasmesse

Un fascio di luce ordinaria non e' polarizzato, la direzione del campo elettrico varia casualmente nel tempo. Esso tuttavia puo' ancora essere considerato come sovrapposizione di due componenti incoerenti, una $\vec{E}_\pi$ polarizzata nel piano d'incidenza e l'altra $\vec{E}_\sigma$ polarizzata nel piano perpendicolare al piano d'incidenza. Ad entrambe le componenti e' associata meta' della potenza P del fascio. La potenza del fascio riflesso risulta allora:

$$\wp_r = \frac{1}{2} \wp R_\pi + \frac{1}{2} \wp R_\sigma = \frac{1}{2} \wp (R_\pi + R_\sigma) = R \wp$$

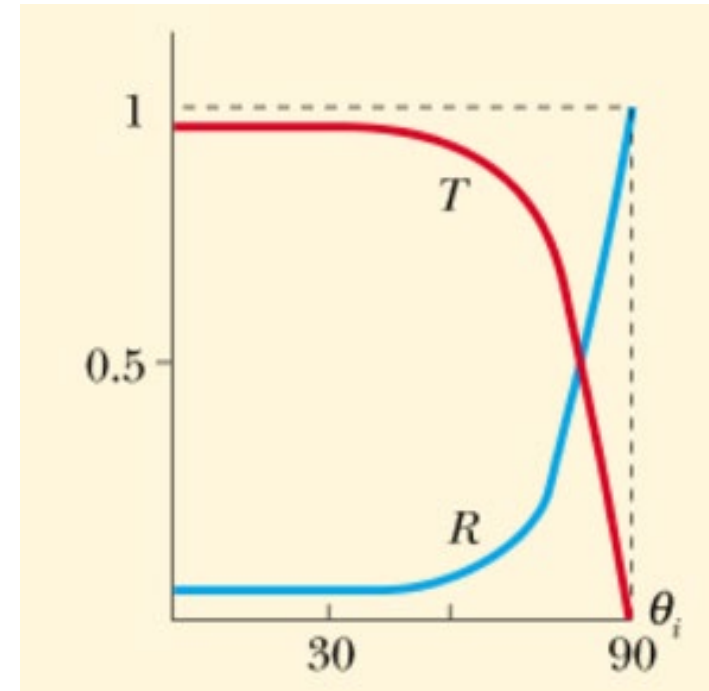
per cui il coefficiente di riflessione per la luce ordinaria e'

$$R = \frac{1}{2} (R_\pi + R_\sigma)$$

La percentuale di energia trasmessa e' data ancora da

$$T = 1 - R$$

Per il vetro $R(\theta_i)$ e $T(\theta_i)$ sono rappresentati in figura.



Intensita' delle onde riflesse e trasmesse

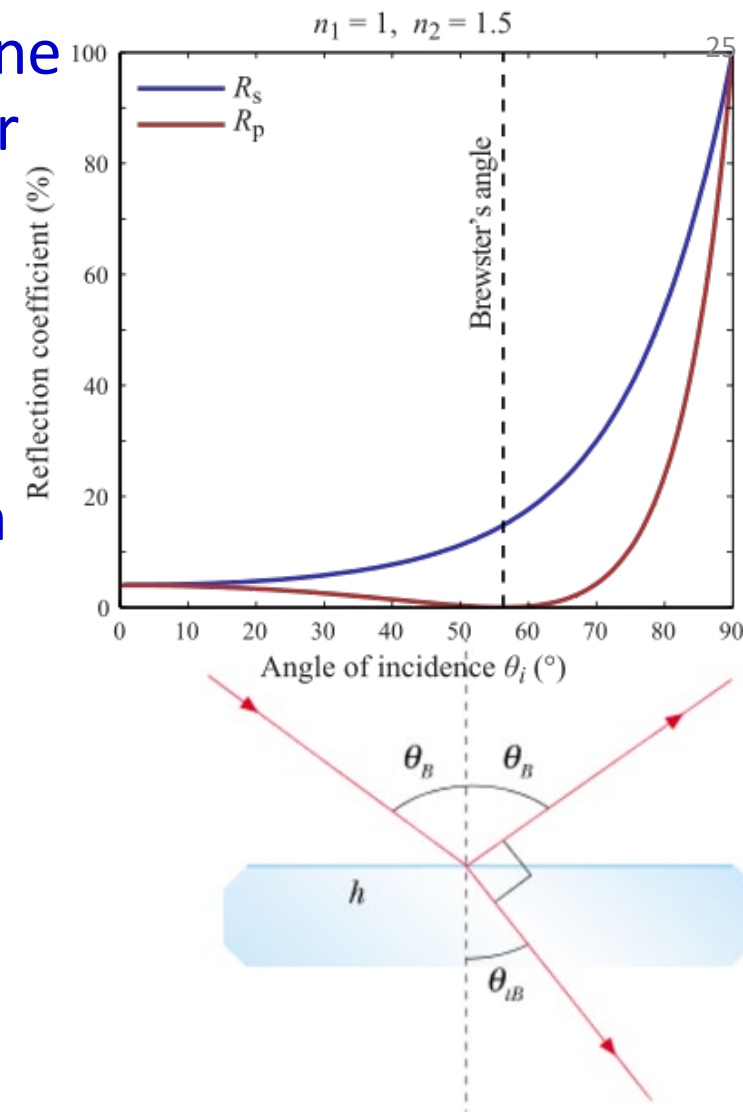
La figura che riporta gli andamenti dei coefficienti di riflessione di Fresnel $R_\pi(\theta_i)$ e $R_\sigma(\theta_i)$ mostra che esiste un angolo $\theta_i = \theta_B$ per il quale risulta $R_\pi(\theta_B) = r_\pi(\theta_B) = 0$. Questo avviene per:

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_\pi = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_\pi = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$$

L'angolo $\theta_i = \theta_B$ per il quale $r_\pi = 0$ si ricava dalla legge di Snell (in aria):

$$n = \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_B}{\sin(\pi/2 - \theta_B)} = \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} = \tan \theta_B = n$$

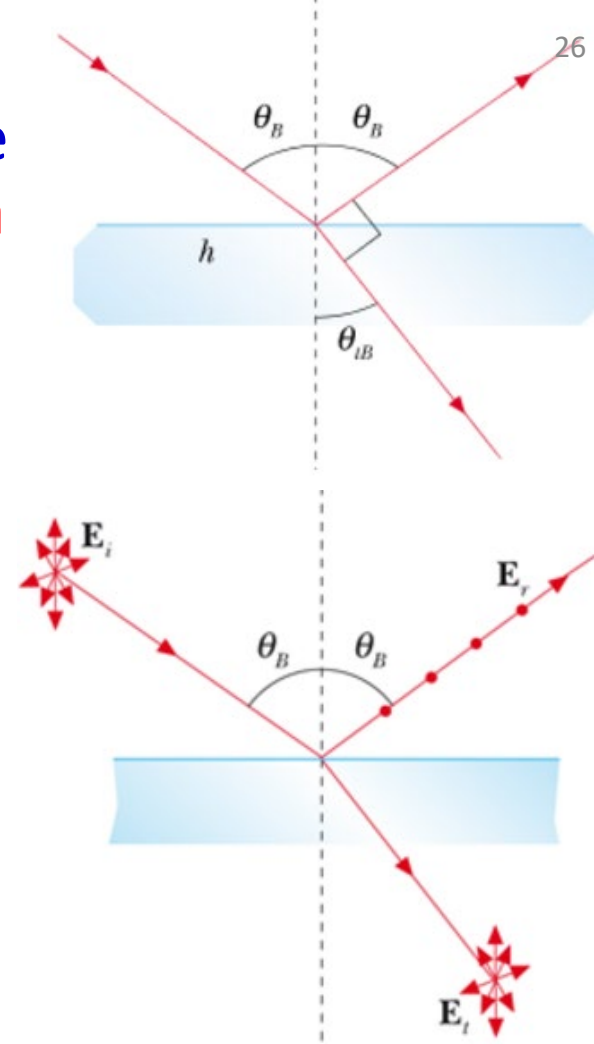
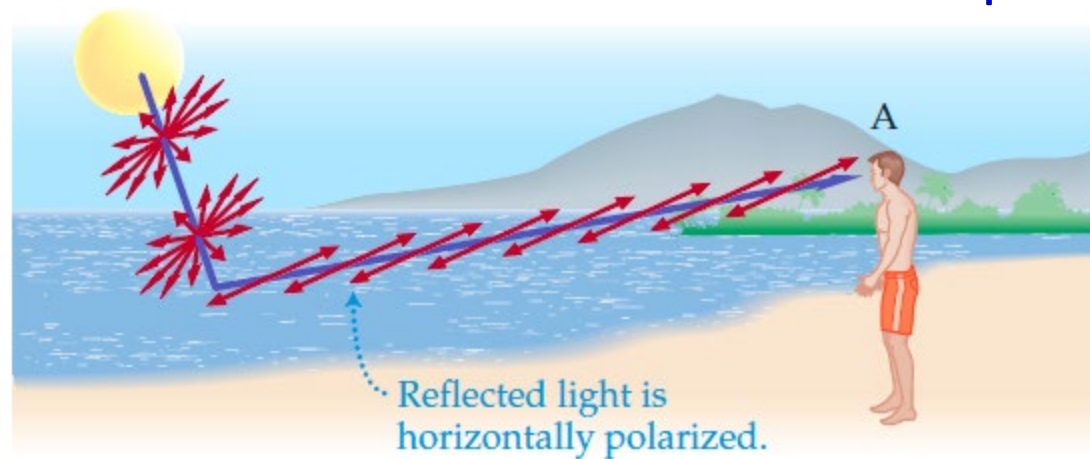
L'angolo θ_B e' chiamato **angolo di Brewster**.



Angolo di Brewster. Polarizzazione per riflessione

Le figure in basso riportano il risultato fisico. Essendo $r_\pi=0$, solamente la componente $\vec{E}_\sigma$ polarizzata nel piano perpendicolare al piano d'incidenza viene riflessa e dunque il fascio di luce riflessa risulta polarizzato rettilineamente, con il campo elettrico $\vec{E}_r$ perpendicolare al piano d'incidenza. Questo e' il fenomeno di polarizzazione per riflessione.

Il fascio trasmesso sara' ancora costituito da luce non polarizzata.



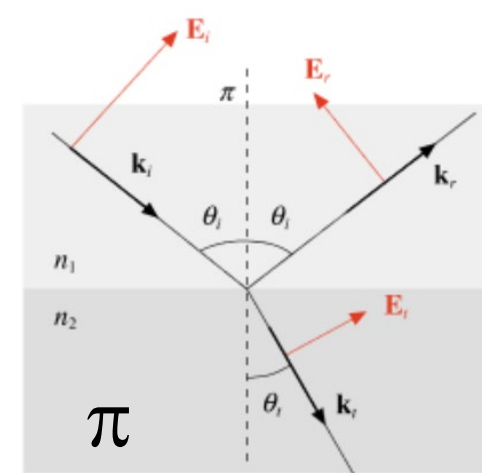
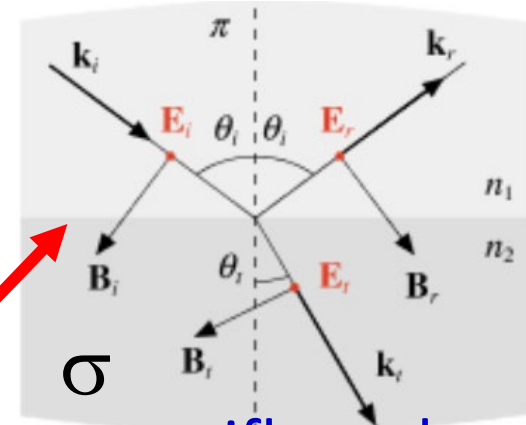
Angolo di Brewster. Polarizzazione per riflessione

Ritorniamo sulle formule di Fresnel per un attimo.

$$r_{\pi} = r_{||} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\pi} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_{\sigma} = r_{\perp} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\sigma} = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

Il **segno negativo** sulla equazione r_{σ} indica che il campo riflesso ha segno opposto rispetto alla notazione in figura.



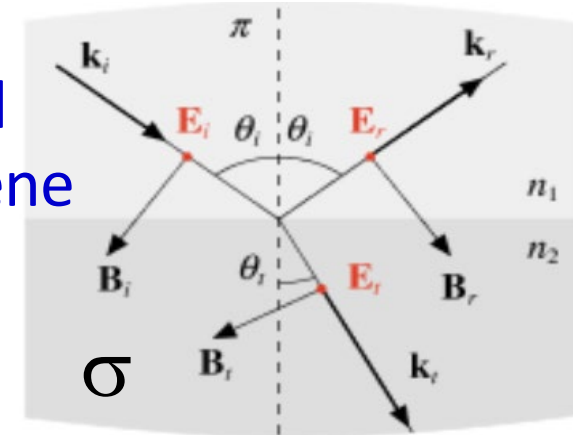
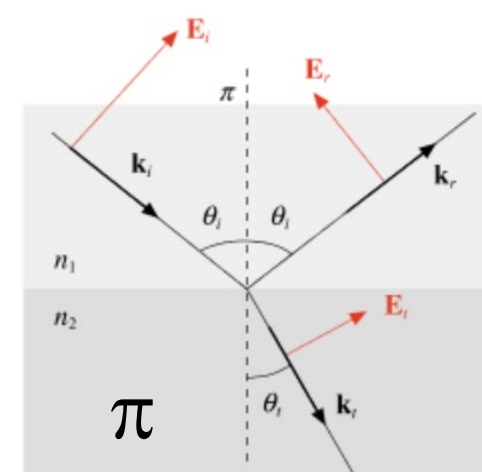
Cambiamento di fase dell'onda riflessa

$$r_{\pi} = r_{||} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\pi} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_{\sigma} = r_{\perp} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\sigma} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

Le due formule quindi seguono le notazioni delle figure qui a fianco e ci dicono che:

- se $\theta_i - \theta_t > 0$ il campo riflesso $E_{r,\sigma}$ ha verso opposto rispetto al campo $E_{i,\sigma}$ nel punto di incidenza-riflessione-trasmissione, avviene cioè un cambiamento di fase dell'onda pari a $\Delta\phi = \pi$ ($= 180^\circ$)
- Notiamo che $\theta_i - \theta_t > 0$ sse $n_1 > n_2$



Cambiamento di fase dell'onda riflessa

Quando l'angolo di incidenza e' nullo la direzione di incidenza coincide con la normale alla superficie di separazione e la nozione di piano di incidenza perde significato. I campi elettrici dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa sono paralleli tra loro e alla superficie. Per angoli $\theta_i \cong 0$ la legge di Snell:

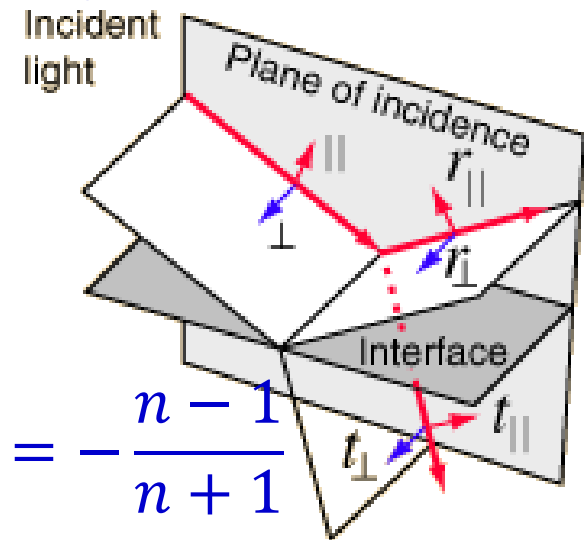
$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} \cong \frac{\theta_i}{\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = n \Rightarrow \theta_i = n\theta_t \cong 0$$

e i coefficienti di riflessione per i campi polarizzati

$$r_{\pi} = r_{||} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right) = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = -\frac{\tan(n\theta_t - \theta_t)}{\tan(n\theta_t + \theta_t)} \cong -\frac{n\theta_t - \theta_t}{n\theta_t + \theta_t} = -\frac{n - 1}{n + 1}$$

$$r_{\sigma} = r_{\perp} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\sigma} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = -\frac{\sin(n\theta_t - \theta_t)}{\sin(n\theta_t + \theta_t)} \cong -\frac{n\theta_t - \theta_t}{n\theta_t + \theta_t} = -\frac{n - 1}{n + 1}$$

si riducono ad un'unica condizione ($n = n_2/n_1$ e' il rapporto degli indici di rifrazione).



Incidenza normale alla superficie di separazione

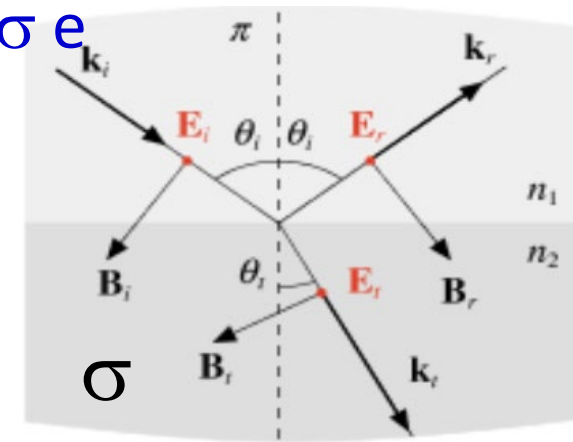
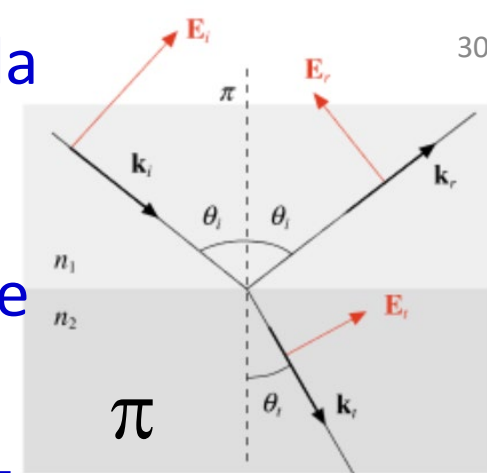
Scrivendo la $r_{\pi} = r_{\parallel} = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\pi} = -\frac{n-1}{n+1}$ abbiamo cambiato il segno della relazione. Questo tiene conto del fatto che per $\theta_i \cong 0$ se $n_2 > n_1$ e quindi $n > 1$ le componenti π del campo $E_{r\pi}$ e $E_{i\pi}$ sono uno l'opposto dell'altro, sono cioè in opposizione di fase (= c'è una differenza di fase di 180°).

Se invece $n_1 > n_2$ e quindi $n < 1$ le componenti π del campo $E_{r\pi}$ e $E_{i\pi}$ sono in fase

Al limite per $\theta_i = 0$ non ha più senso parlare di componenti π ed σ e per i campi incidente e riflesso vale semplicemente:

$$r = \frac{E_r}{E_i} = -\frac{n-1}{n+1} \Rightarrow R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

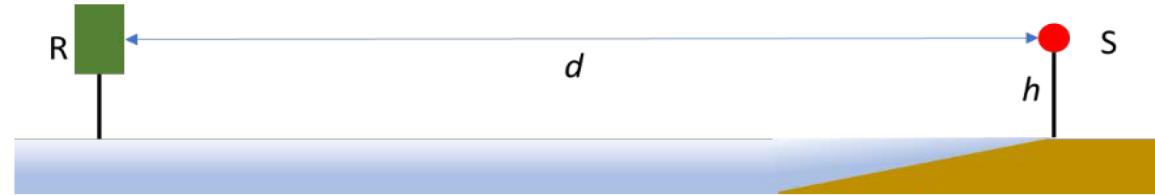
Per $n=1.33$ $R=0.02$.



Incidenza normale alla superficie di separazione

Onde (8pt)

Una sorgente di onde elettromagnetiche emette onde sferiche di frequenza $\nu=3.75 \cdot 10^{10}$ Hz con potenza pari a $P=25$ W si trova a riva ad una altezza di $h=1$ m rispetto al livello del mare.



Un ricevitore si trova ad una distanza $d=1$ km dalla sorgente in mezzo al mare anche esso ad una altezza h rispetto alla superficie dell'acqua ($n_{H_2O}=1.33$).

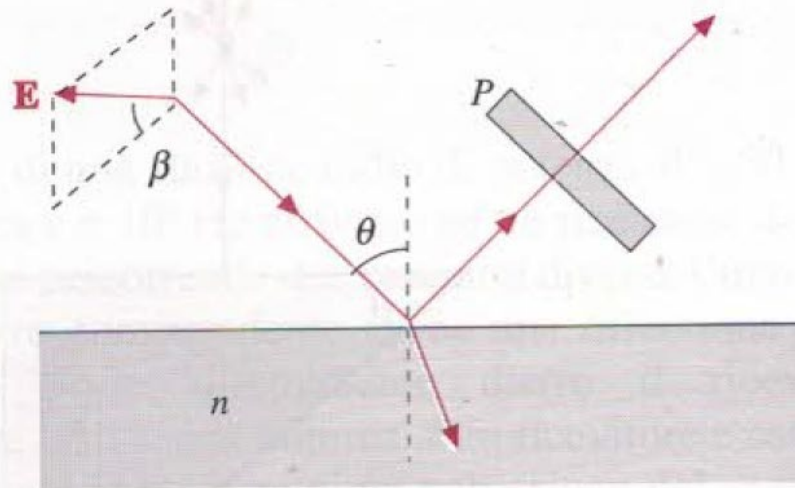
Trascurando l'onda riflessa sull'acqua:

- 1) Calcolare l'energia raccolta $\mathcal{E}$ da un ricevitore totalmente assorbente di superficie $\Sigma=25\text{cm}^2$ nel tempo $\Delta t=3$ minuti nell'ipotesi che la sua normale sia parallela alla congiungente sorgente-rivelatore.
- 2) Calcolare l'ampiezza massima del campo magnetico $\mathbf{B}$ in prossimità del ricevitore

Tenendo conto ora anche del contributo dovuto all'onda riflessa dalla superficie dell'acqua:

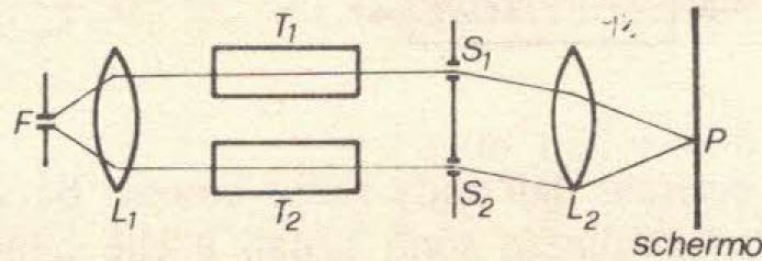
- 3) Calcolare l'intensità $\mathbf{I}$ misurata dal ricevitore nel caso in cui la sorgente emetta onde polarizzate perpendicolarmente al piano di incidenza
- 4) Se il rivelatore viene ora ricoperto con un materiale conduttore, quanto vale l'ampiezza massima del campo elettrico $\mathbf{E}$ in prossimità della superficie del rivelatore stesso.

- 14.11** Un fascio di luce di potenza $W = 20 \text{ W}$, polarizzato rettilineamente in un piano che forma l'angolo $\beta = 30^\circ$ rispetto al piano di incidenza, incide con un angolo $\theta = 45^\circ$ su una lastra di materiale trasparente avente indice di rifrazione $n = 1.73$. Calcolare la potenza W_r dell'onda riflessa, lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa, la potenza $W_p(\alpha)$ trasmessa da un polarizzatore posto normalmente sulla direzione del fascio riflesso in funzione dell'angolo α formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza. Ripetere il problema con $\theta = 60^\circ$.



MNV

- 12.8. Un interferometro per la misura degli indici di rifrazione dei gas è schematizzato in figura. Esso consta di una lente L_1 che trasforma il fascio divergente di luce monocromatica ($\lambda = 600 \text{ nm}$) proveniente da una sottile fenditura F illuminata in un fascio parallelo; di due tubi uguali T_1 e T_2 a finestre trasparenti di lunghezza $l = 50 \text{ cm}$; di due fenditure S_1 e S_2 , parallele a F , praticate su uno schermo opaco; di una lente L_2 che focalizza su uno schermo la figura di interferenza prodotta da S_1 e S_2 . Fatto il vuoto in T_1 e T_2 si osserva un sistema di frange parallele alle fenditure, analogo a quello prodotto dal dispositivo di Young (problema 12.1). Se si riempie T_1 con un gas di indice di rifrazione n si osserva uno spostamento di $N = 10$ frange del sistema. Spiegare il risultato di questa esperienza calcolando n . Supponendo di potere apprezzare al più lo spostamento di una frangia calcolare il valore minimo di n misurabile con questo strumento.



Nigro-Voci

Prova Scritta di Complementi di Fisica per Ingegneria Aerospaziale, AA 2014/2015

II Problema. Un rivelatore di sezione $\Sigma=0.04\text{m}^2$ e' posto alla distanza $r=1\text{Km}$ da una sorgente che emette radiazione elettromagnetica di frequenza $\nu=30\text{ MHz}$ sotto forma di onde a simmetria sferica. Il campo elettrico in prossimità' del rivelatore e' $E_0=0.707\text{V/m}$. Calcolare:

1) l'energia U_R che il rivelatore potrebbe accumulare in 30 minuti di osservazioni in condizioni ideali

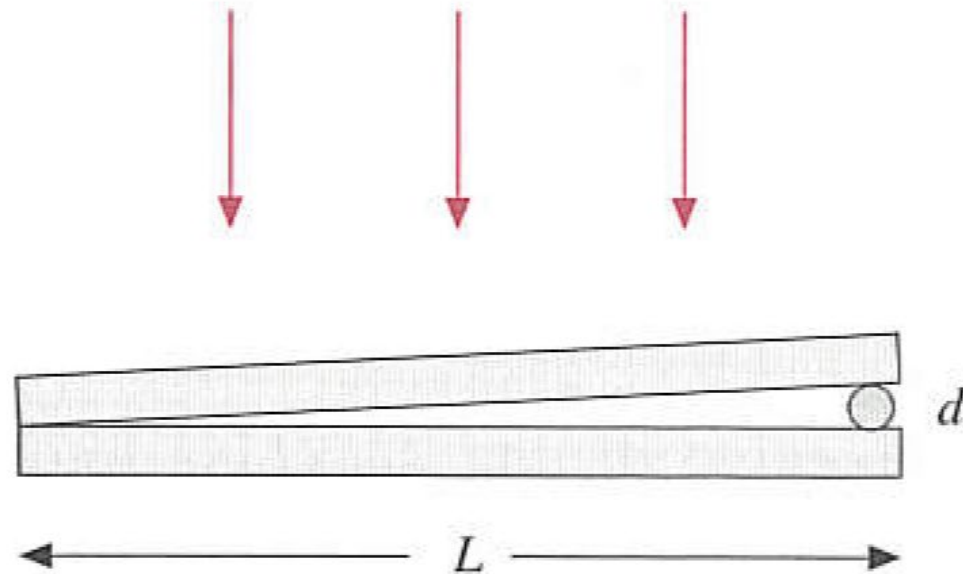
2) la potenza P_A della sorgente

Successivamente si pone uno schermo riflettente oltre il rivelatore, ad una distanza $d=10\text{m}$ da esso.

3) Supponendo che l'onda venga completamente riflessa dallo schermo, calcolare il rapporto R tra l'intensità' osservata e quella che si aveva senza lo schermo

5) Si osserva viceversa che il rapporto tra l'intensità' osservata in queste condizioni e quella senza lo schermo e' $R'=0.6$. Calcolare il valore del coefficiente di Fresnel r_s dello schermo.

- 15.17** Una sorgente estesa di luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0.68 \mu\text{m}$ illumina perpendicolarmente due lastre di vetro lunghe $L = 120 \text{ mm}$ che si toccano ad un estremo e all'altro sono separate da un filo di diametro $d = 0.048 \text{ mm}$. Calcolare le posizioni delle frange chiare e delle frange scure, il loro numero totale e la loro densità.



MNV

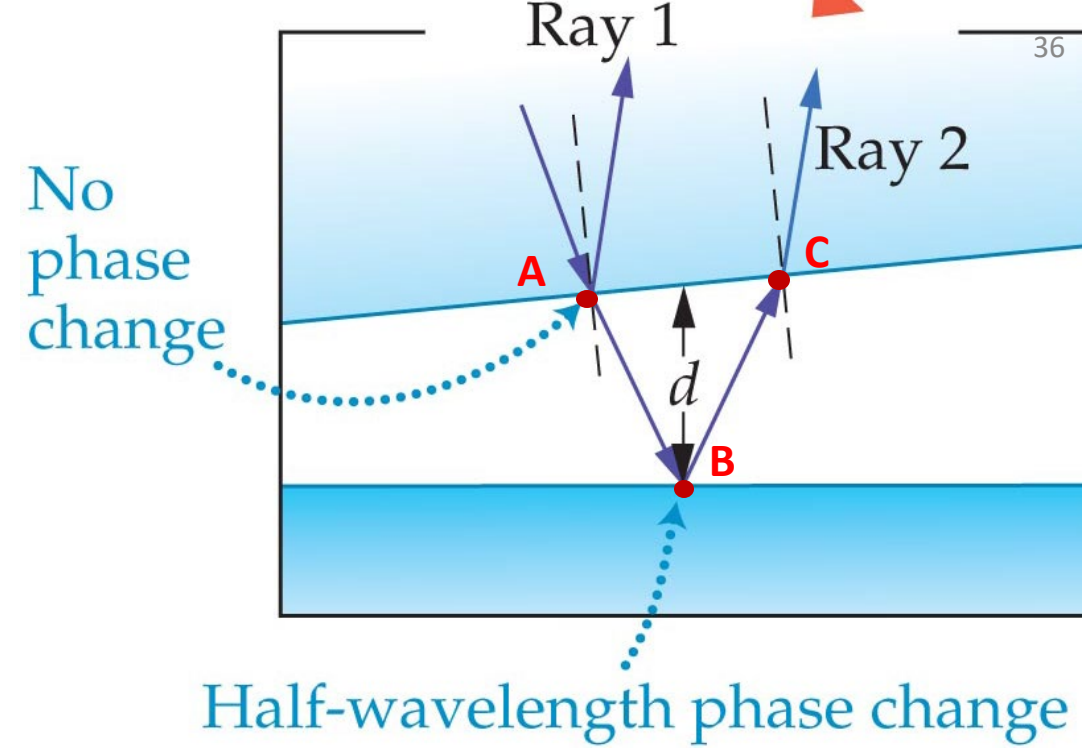
To understand how the two rays interfere we calculate the phase difference between them.

Look at the 2 light paths, 1 and 2

- Ray 1 is created in A
 - Ray 2 is created in C
 - Light has to travel the extra distance AB+BC before it generates Ray 2
 - $AB+BC \sim d+d$ for small angles of incidence.
- There is an extra phase shift in B of 180° , this is equivalent of a phase shift due to $\frac{1}{2}$ wavelength extra travel
- The effective path length difference is then:

$$\Delta \ell_{\text{eff}} = d + \frac{1}{2}\lambda + d = \frac{1}{2}\lambda + 2d$$

The air wedge



Complementi di Fisica per Ingegneria Aerospaziale e Meccanica, AA 2016/2017 – 20/12/2016

Un sistema di due fenditure sottili è colpito da un'onda piana formata dalla sovrapposizione di due onde di frequenza $\nu_1 = 4 \cdot 10^{14}$ Hz e $\nu_2 = 5 \cdot 10^{14}$ Hz che incide ortogonalmente al piano delle due fenditure. La distanza tra le due fenditure è $d = 100 \mu\text{m}$. La figura generata dalle fenditure viene osservata su uno schermo posto ad una distanza $L = 1\text{m}$ posto parallelamente al piano delle fenditure. Sullo schermo si fissa un sistema di coordinate come in figura ($x=0$ sull'asse delle fenditure e puntante verso l'alto). Per tutto il problema si trascurino gli effetti dovuti alla diffrazione.

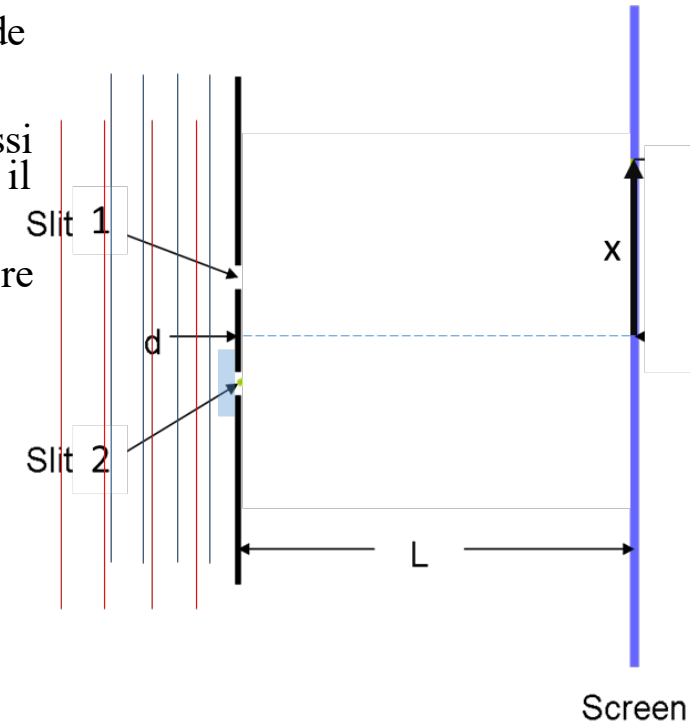
1. Calcolare il minimo ordine per quale il massimo di interferenza della componente a frequenza minore è sovrapposto ad un minimo di interferenza della componente a frequenza maggiore.

Per il resto del problema si consideri **solo la componente a frequenza maggiore** e si supponga che la potenza emessa da ciascuna delle due fenditure nel semipiano contenente lo schermo sia $P_0 = 15\text{mW}$

2. Calcolare l'ampiezza del campo elettrico nel punto dello schermo posto a $x=0$.

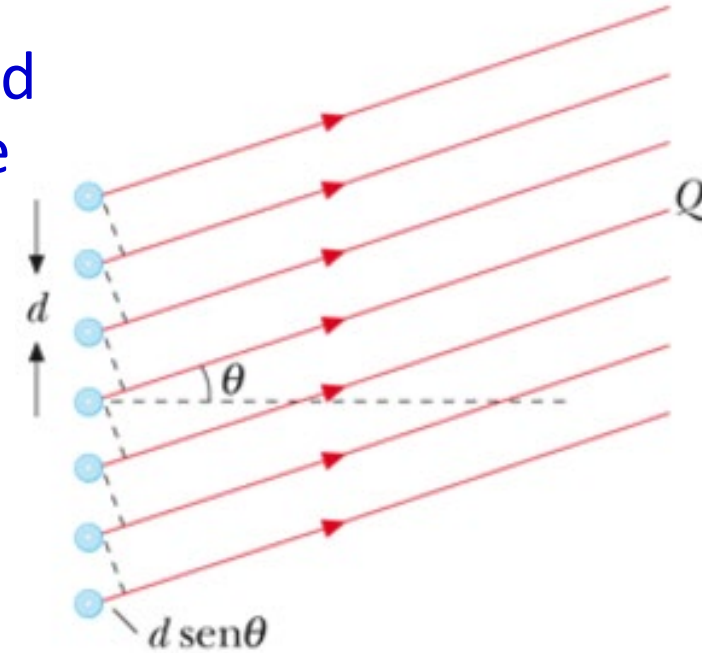
Davanti alla seconda fenditura viene ora posta una lamina sottile di spessore $s = 15 \mu\text{m}$ di materiale trasparente di indice di rifrazione $n = 1.1$.

3. Calcolare la nuova posizione, x_{max} , sullo schermo dove si pone il massimo centrale. Indicare se è $x_{\text{max}} > 0$ o $x_{\text{max}} < 0$ aggiungendo un segno (+ o -) alla risposta.
4. Tenendo conto della intensità trasmessa durante l'attraversamento della lamina (si trascurino le riflessioni interne multiple e l'interferenza di lamina), calcolare l'intensità misurata in corrispondenza di un minimo di interferenza (per esempio il minimo del primo ordine).



Abbiamo esaminato i fenomeni osservabili dall'interferenza di due onde sferiche luminose prodotte da due sorgenti coerenti. Trattiamo ora l'interferenza prodotta da N sorgenti di onde elettromagnetiche coerenti, e più in generale l'interferenza di N sorgenti di onde sferiche coerenti (anche onde di natura meccanica, quali le onde sulla superficie di un liquido, e le onde acustiche).

Consideriamo N antenne (sorgenti) disposte lungo una retta ed equispaziate della distanza d , figura. Supponiamo di osservare la loro interferenza a grandi distanze rispetto alla dimensione $(N-1)d$ del sistema, possiamo quindi utilizzare le stesse approssimazioni geometriche introdotte nella trattazione dell'esperienza di Young.

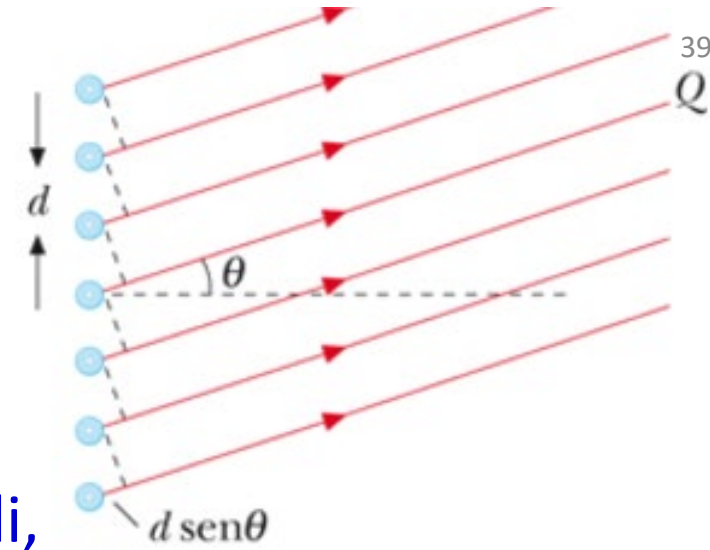


Interferenza di N sorgenti

Detto θ l'angolo formato tra la direzione di emissione (di osservazione) e la normale alla linea contenente le sorgenti, tra le due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la **differenza di fase**

$$\delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

In un punto Q le ampiezze E_1 delle singole sorgenti sono uguali, data la lontananza di Q dalle sorgenti; ma non sono in fase, a causa della differenza di cammino $d \cdot \sin \theta$ tra le onde emesse da due sorgenti consecutive.



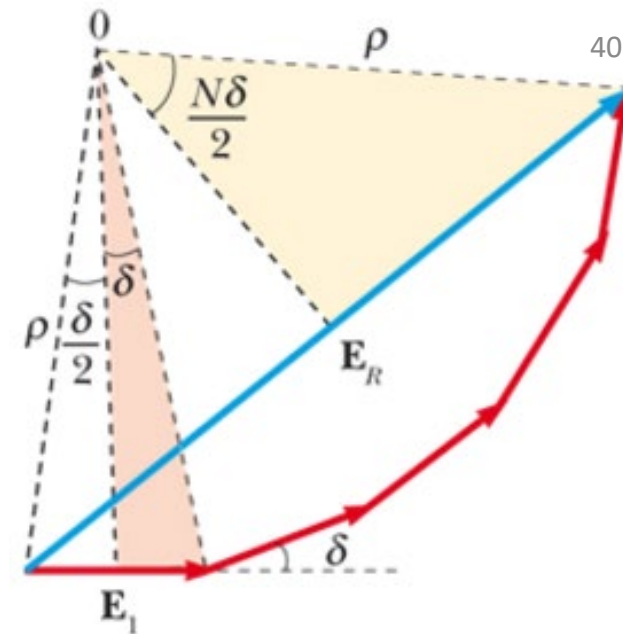
Interferenza di N sorgenti

Per calcolare l'ampiezza risultante E_R utilizziamo il **metodo dei fasori**. Le ampiezze del campo elettrico delle singole sorgenti E_1 si dispongono lungo una poligonale regolare di N lati, che è inscritta in un arco di circonferenza di raggio ρ ; l'angolo al centro che sottende il singolo vettore E_1 è θ , quello che sottende la risultante E_R della poligonale è $N\delta$. Pertanto:

$$E_1 = 2\rho \sin \frac{\delta}{2} \quad , \quad E_R = 2\rho \sin \frac{N\delta}{2}$$

Combinandole si ha l'ampiezza risultante E_R in funzione dell'ampiezza E_1 di ciascuna sorgente e della differenza di fase θ tra le onde emesse da sorgenti consecutive:

$$E_R = E_1 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$$



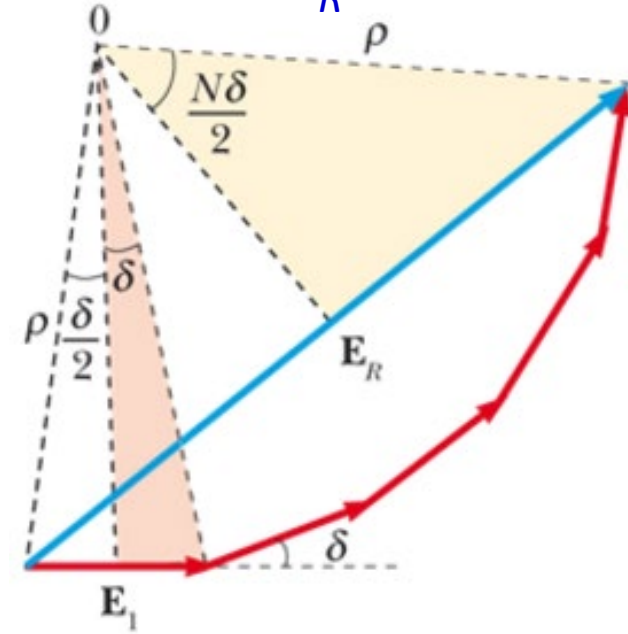
Interferenza di N sorgenti

L'intensita' dell'onda risultante nel punto Q e' proporzionale al quadrato di E_R :

$$I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = I_1 \left(\frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

con I_1 intensita' di ciascuna sorgente.

Per $N = 2$ si ottiene la $4I_1 \cos^2(\delta/2)$.



Interferenza di N sorgenti

I **massimi principali d'intensita'** si hanno per $\delta \cong 2m\pi$:

$$\lim_{\delta/2 \rightarrow m\pi} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} = \pm N, E_{max} = NE_1, I_{max} = N^2 I_1$$

ovvero nelle direzioni per cui $\pi d \sin \theta / \lambda = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):
massimi principali $\sin \theta = m \lambda / d$

L'intensita' $I_R(\theta)$ si annulla quando si annulla il numeratore $\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}$, ma non il denominatore, quindi: $N\pi d \sin \theta / \lambda = m'\pi$, cioè:

$$\begin{array}{l} \text{minimi} \qquad \qquad \qquad \sin \theta = m' \lambda / Nd \\ (m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots) \end{array}$$

$m' \neq mN$ per cui si hanno massimi principali. Tra due massimi principali si hanno quindi $N-1$ minimi.

Interferenza di N sorgenti

Tra due minimi si formano dei massimi detti secondari nelle direzioni per cui $N\pi d \sin \theta / \lambda = (2m'' + 1) \pi / 2$, ovvero:

$$\begin{aligned} \text{massimi secondari} \quad \sin \theta &= (2m'' + 1) \lambda / 2Nd \\ (m'' &= 1, 2, \dots, N - 2, N + 1, \dots, 2N - 2, 2N + 1, \dots) \end{aligned}$$

Tra due massimi principali ci sono $N-2$ massimi secondari. Il valore dell'intensità dei massimi secondari risulta:

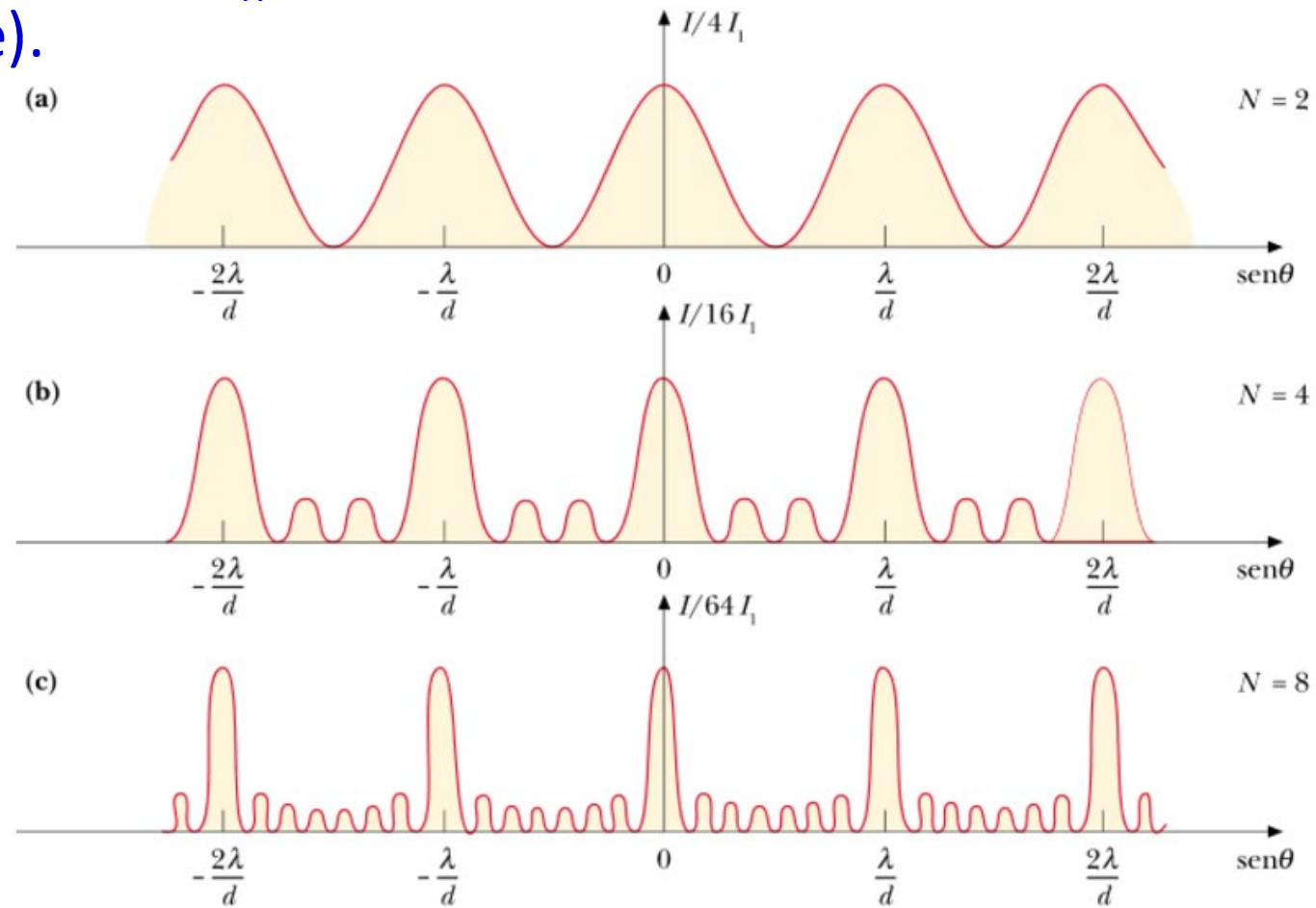
$$I_{m''} = \frac{I_1}{\left[\sin \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2}$$

essa risulta al più di qualche percento rispetto a $I_{\max}$ per cui la loro presenza, pur concettualmente importante, è di fatto irrilevante dal punto di vista pratico.

Interferenza5fenditure.ggb

Interferenza di N sorgenti

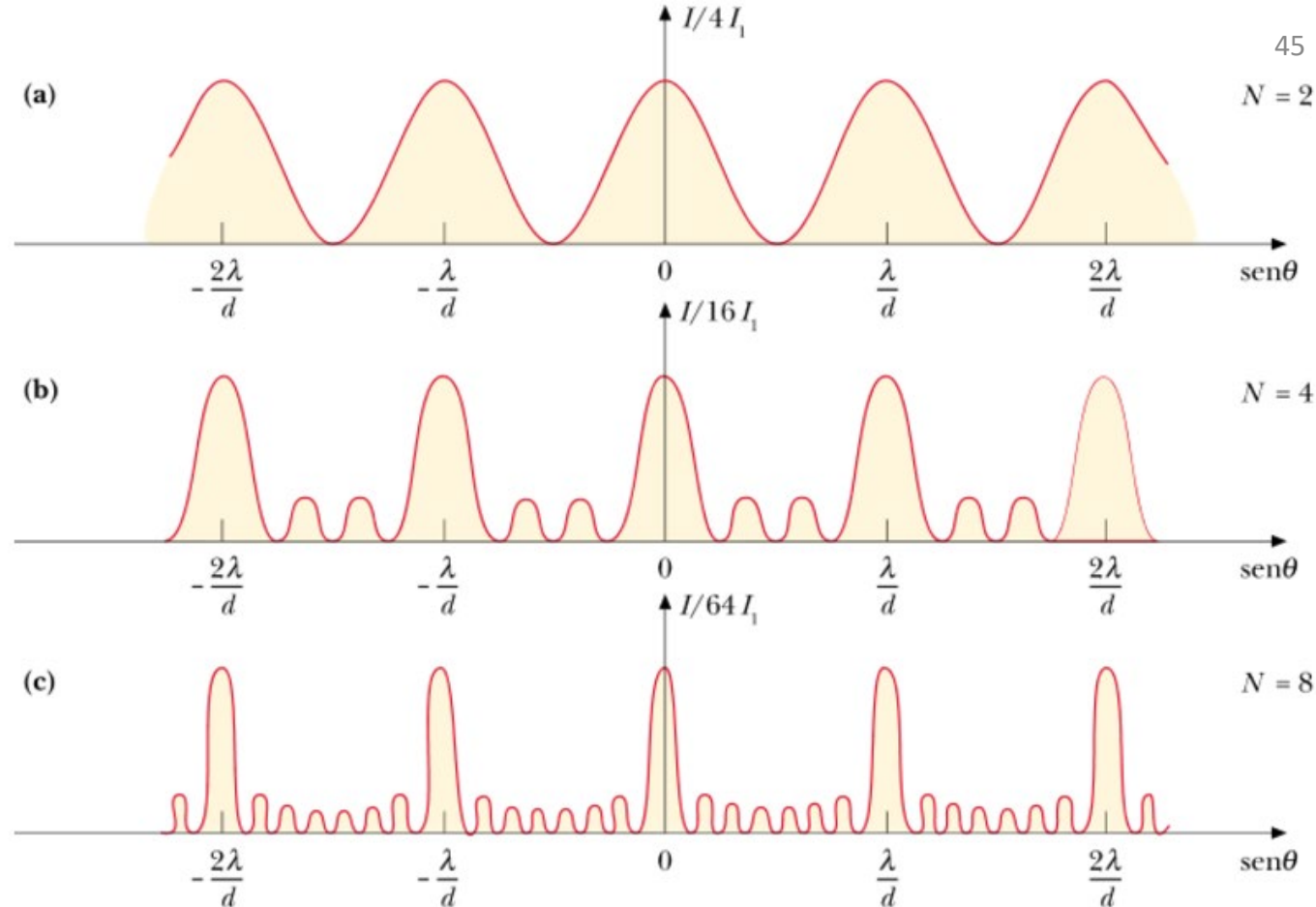
In figura e' rappresentata $I_R(\theta)$, detta figura d'interferenza, per sistemi di $N = 2, 4, 8$ sorgenti (antenne).



Interferenza di N sorgenti

La figura evidenzia le peculiarità del sistema:

- la direzione dei massimi principali è determinata dal rapporto λ/d e non dipende dal numero N di sorgenti;
- l'intensità dei massimi principali dipende dal numero N delle sorgenti e cresce con questo secondo $I_{max} = N^2 I_1$;
- l'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di N.



Interferenza di N sorgenti

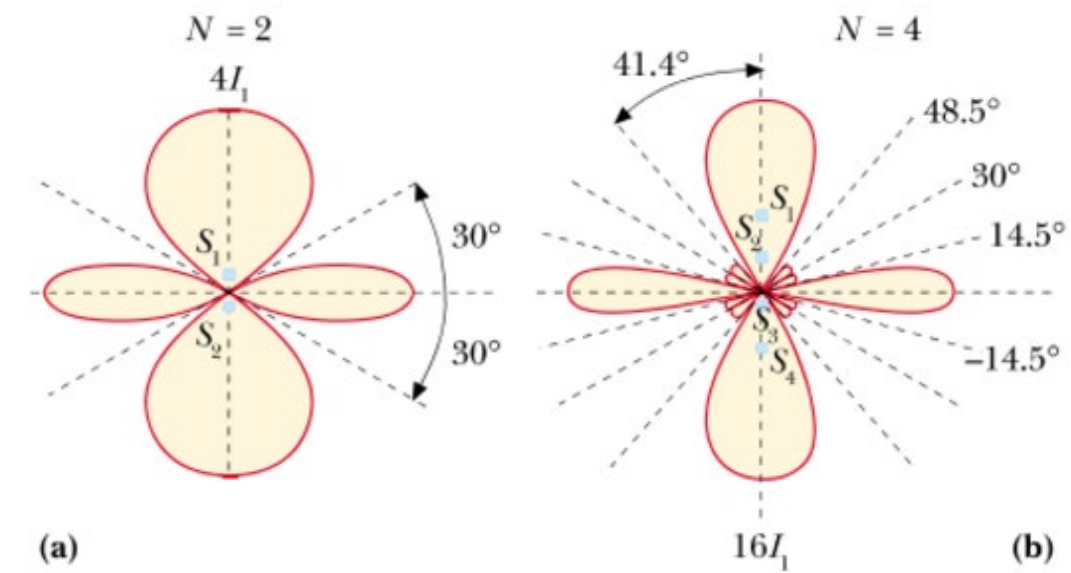
Circa quest'ultima proprietà i due minimi adiacenti ad un massimo principale si osservano per $\sin \theta_1 = m\lambda - \lambda/Nd$ e $\sin \theta_2 = m\lambda + \lambda/Nd$; la **larghezza angolare** del massimo principale è quindi $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$. Nell'ipotesi $\sin \theta \cong \theta$, certamente verificata per il massimo principale di ordine $m = 0$, $\theta_{\max} = 0$, si ha:

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}$$

che evidenzia come la larghezza angolare diminuisce all'aumentare di N .

Interferenza di N sorgenti

Due sistemi rispettivamente di $N = 2$ e $N = 4$ antenne in linea, ciascuna di potenza $P=100$ kW, distanti $d = 10$ m una dall'altra, emettono onde elettromagnetiche sferiche sincrone di frequenza $\nu = 3 \cdot 10^7$ Hz. Calcolare le figure d'interferenza prodotte dai due sistemi alla distanza $L = 10$ km dal sistema.



Interferenza di N sorgenti. Esempio

15.11 Quattro onde sonore di frequenza $\nu = 400$ Hz si propagano lungo l'asse x ; esse sono rappresentate dalle espressioni:

$$\xi_1 = \xi_0 \cos(kx - \omega t) ,$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_0}{3} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$\xi_3 = \frac{\xi_0}{4} \cos\left(kx - \omega t + \pi\right) ,$$

$$\xi_4 = \frac{\xi_0}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{3}{2}\pi\right) ,$$

con $\xi_0 = 10^{-10}$ m. Calcolare l'espressione dell'onda risultante, la sua intensità e il suo livello sonoro.

MINV

15.12 N sorgenti sincrone di onde sonore sferiche, descritte dall'espressione $\xi = (\xi_0 / r) \cos (kr - \omega t)$, sono disposte lungo una linea; la frequenza è $\nu = 688$ Hz, la distanza tra le sorgenti è d , la potenza totale del sistema è $W = 500$ W; la propagazione avviene in aria, con $v = 344$ m/s. Si osservano massimi di intensità di eguale valore agli angoli $\theta = 0^\circ, 11.53^\circ, 23.58^\circ, 36.86^\circ, \dots$ rispetto alla direzione normale alla linea delle sorgenti; la larghezza angolare del massimo centrale è $\Delta\theta = 4.58^\circ$. Calcolare il numero N di sorgenti, la dimensione complessiva L del sistema, l'intensità I_M e il livello sonoro dei massimi alla distanza $r = 5$ km dal sistema, l'ampiezza ξ_0 che caratterizza ciascuna sorgente e l'ampiezza di pressione Δp sempre alla distanza r .

MNV

Compito Complementi di Fisica per Ingegneria Aerospaziale, AA 2011/2012, Sessione Autunnale

II Problema Una sorgente di onde sferiche emette luce di lunghezza d'onda compresa tra $0.55\text{ }\mu\text{m}$ e $0.47\text{ }\mu\text{m}$. A distanza di 5m dalla sorgente la luce incide normalmente su una sottile pellicola di acqua saponata ($n=4/3$) di spessore $d=1.2\text{ }\mu\text{m}$. Sapendo che la potenza emessa e' 50W :

- 1) Calcolare il campo elettrico E dell'onda incidente sulla pellicola.
- 2) Quale lunghezza d'onda viene maggiormente riflessa?
- 3) Se la pellicola e' poggiata su una lastra di quarzo ($n_Q=1.5$) quale lunghezza d'onda viene maggiormente riflessa?
- 4) Si ruota la lastra di un angolo α fino a che la luce trasmessa forma un angolo di 30° con la normale alla superficie del quarzo. Calcolare l'angolo α .

Compito, Sept 2012

Esempio 15.8

Quattro antenne in fase sono poste a distanza $d = \lambda/4$. Calcolare come varia l'intensità a grande distanza dal sistema. Ripetere il calcolo nel caso in cui le antenne siano eccitate dall'oscillatore in modo tale da essere sfasate di $\pi/2$ l'una rispetto alla successiva.

MNV