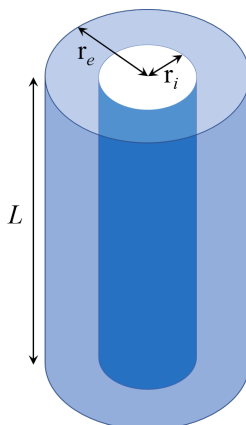


Fisica Generale 2: Appello di recupero - Prova del 01/09/2025

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



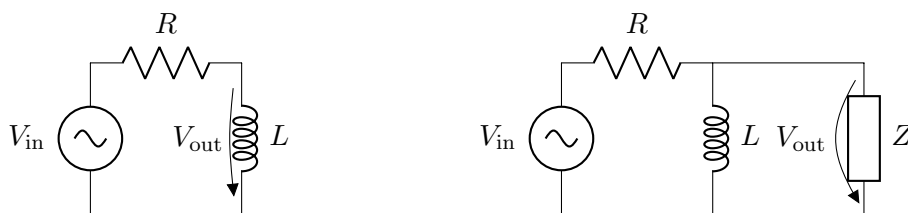
Si considerino due sottili gusci cilindrici conduttori coassiali, di raggi rispettivi $r_i = 5\text{ cm}$ e $r_e = 9\text{ cm}$ e lunghezza $L = 105\text{ cm}$. Tra di essi è presente un dielettrico scarico omogeneo ed isotropo, perfettamente isolante, di suscettività dielettrica $\chi = 3$. I due gusci cilindrici sono isolati e su quello interno ed esterno sono presenti rispettivamente le cariche libere $Q_{0i} = -Q$ e $Q_{0e} = Q$, con $Q = 7\text{ }\mu\text{C}$. Si assuma che il conduttore esterno sia a potenziale 0. Calcolare, trascurando gli effetti di bordo:

- (a) il potenziale elettrostatico V_1 , V_2 , V_3 nei punti che distano rispettivamente dall'asse $r_1 = 2\text{ cm}$, $r_2 = 7\text{ cm}$, $r_3 = 10\text{ cm}$;
- (b) la capacità C del condensatore così ottenuto;
- (c) la densità spaziale di carica di polarizzazione $\rho_p(r_2)$ e le cariche totali di polarizzazione Q_{pi} e Q_{pe} presenti sulle superfici interna ed esterna del dielettrico affacciate ai conduttori.

Mantenendo isolato il condensatore, il dielettrico viene lentamente estratto.

- (d) Calcolare i valori V_i' e V_e' del potenziale sui gusci conduttore interno ed esterno dopo l'estrazione ed il lavoro meccanico W_m compiuto dall'agente esterno per estrarre il dielettrico.

Problema 2.



Configurazione iniziale (a sinistra) e finale (a destra) del circuito

Il circuito nella figura a sinistra consiste di una resistenza $R = 50\text{ }\Omega$ ed una induttanza $L = 0.197\text{ mH}$ alimentato con una tensione oscillante, $V_{in} = V_{0,in} \cos(\omega_0 t)$, con $\omega_0 = 1.5 \times 10^5\text{ rad/s}$ e

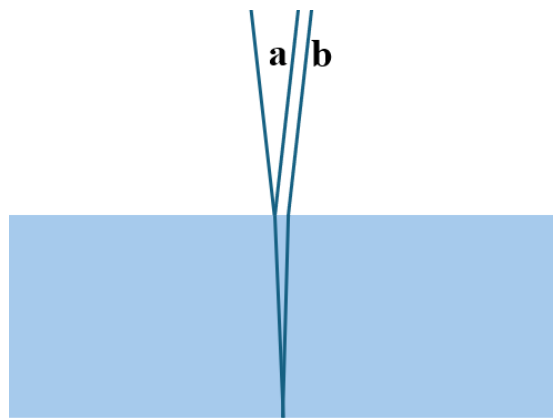
$V_{0,\text{in}} = 10 \text{ V}$. Ai capi dell'induttanza si misura una tensione: $V_{\text{out}} = V_{0,\text{out}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Calcolare:

- (a) i valori di $V_{0,\text{out}}$ e φ ;
- (b) il massimo valore della potenza erogata dal generatore in queste condizioni.

Si collega successivamente in parallelo a L un elemento di impedenza Z , e si osserva in queste condizioni che V_{out} è in fase con V_{in} . In questa nuova configurazione:

- (c) determinare la natura dell'elemento inserito (resistenza/induttanza/capacità) calcolandone il valore caratteristico corrispondente (R, L', C);
- (d) il massimo valore della corrente I'_0 che fluisce attraverso la resistenza in queste condizioni.

Problema 3.



Una sottile lamina trasparente di spessore $d = 0.6 \mu\text{m}$ è immersa in aria e viene illuminata in incidenza normale con una sorgente di luce policromatica avente lunghezze d'onda comprese tra 450 e 700 nm. Supponendo che l'indice di rifrazione della lamina sia $n = 1.4$, calcolare:

- (a) le lunghezze d'onda dei massimi osservati in riflessione;
- (b) le differenze di fase $\Delta\phi_1$ e $\Delta\phi_2$ fra la luce riflessa dalla faccia superiore (raggio "a" in figura) e quella riflessa dalla faccia inferiore della lamina (raggio "b" in figura) per le lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 corrispondenti ai primi due massimi osservati.

N.B. Per ragioni di chiarezza i raggi sono disegnati non esattamente normali alla lamina.

Se la componente λ_1 del fascio incidente ha intensità pari a $I_1 = 5 \text{ W/cm}^2$, calcolare:

- (c) l'intensità I_{R1} della componente λ_1 riflessa dalla faccia superiore della lastra nel caso sia polarizzata linearmente;
- (d) l'intensità I'_{R1} della componente λ_1 riflessa dalla faccia superiore della lastra nel caso sia polarizzata circolarmente.

Soluzione del problema 1

(a) Sfruttando le simmetrie $\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$ e $\vec{D}(r) = D(r) \vec{u}_r$, con $\vec{u}_r$ versore perpendicolare all'asse ed uscente da questo. In un dielettrico omogeneo ed isotropo $E(r) = D(r)/\epsilon = D(r)/(\kappa \epsilon_0)$. Dalla legge di Gauss $E(r) = 0$ per $r < r_i$ e (ricordando che $Q_{0e} = -Q_{0i}$) per $r > r_e$, mentre per $r_i < r < r_e$:

$$2\pi r L D(r) = Q_{0i} \quad \Rightarrow \quad D(r) = \frac{Q_{0i}}{2\pi r L} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q_{0i}}{2\pi \epsilon_0 \kappa r L}$$

Allora, essendo $V(r_e) = 0$, per $r > r_e$ è $V(r) = 0$, dunque anche $V(r_3) = 0$.

Per $r_i < r < r_e$

$$V(r) = V_e - \int_{r_e}^r E(r') dr' = \frac{Q_{0i}}{2\pi \epsilon_0 \kappa L} \log \frac{r_e}{r}$$

da cui

$$V(r_1) = V(r_i) = \frac{Q_{0i}}{2\pi \epsilon_0 \kappa L} \log \frac{r_e}{r_i} = -17.6 \text{ kV} \quad V(r_2) = \frac{Q_{0i}}{2\pi \epsilon_0 \kappa L} \log \frac{r_e}{r_2} = -7.53 \text{ kV}$$

(b) Dalla definizione di capacità ritroviamo $C = \kappa C_0 = (\chi + 1) C_0$, con C_0 calcolato a lezione:

$$C = \frac{Q_{0e}}{V} = -\frac{Q_{0i}}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 (\chi + 1) L}{\log(r_e/r_i)} = 397 \text{ pF} \quad \left[C_0 = \frac{C}{\kappa} = 99.3 \text{ pF} \right]$$

(c) In un dielettrico normale in cui $\rho_0 = 0$ è anche $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -[(\kappa - 1)/\kappa] \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$, dunque $\rho_p(r_2) = 0$. Allo stesso risultato si poteva arrivare ricordando che in coordinate **cilindriche** $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = (1/r)(\partial/\partial r)(rP_r) + \dots$ o passando a coordinate cartesiane per il calcolo. Inoltre, tenendo conto che i versori normali $\vec{u}_e$ e $\vec{u}_i$ alle superfici esterna ed interna del dielettrico sono rispettivamente concordi e discordi a $\vec{u}_r$:

$$\sigma_{pi} = \vec{P} \cdot \vec{u}_i = -P(r_i) = -\epsilon_0 \chi E(r_i) = \frac{\epsilon_0 \chi Q}{2\pi \epsilon_0 (\chi + 1) L r_i} = -\frac{\chi}{\chi + 1} \sigma_{0i} = 1.59 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_{pe} = \vec{P} \cdot \vec{u}_e = P(r_e) = \epsilon_0 \chi E(r_e) = -\frac{\epsilon_0 \chi Q}{2\pi \epsilon_0 (\chi + 1) L r_e} = -\frac{\chi}{\chi + 1} \sigma_{0e} = -8.84 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

Moltiplicando per l'area dei rispettivi gusci, $Q_{pi} = \sigma_{pi} 2\pi r_i L = Q \chi/(\chi + 1) = 5.25 \mu\text{C}$, $Q_{pe} = \sigma_{pe} 2\pi r_e L = -Q \chi/(\chi + 1) = -5.25 \mu\text{C} = -Q_{pi}$.

(d) A Q costante, la rimozione del dielettrico cambia la capacità da C a $C_0 = C/\kappa = C/(\chi + 1)$, dunque la differenza di potenziale dopo l'estrazione diventa:

$$V_e' - V_i' = \frac{Q}{C_0} = \frac{Q \log(r_e/r_i)}{2\pi \epsilon_0 L} = 70.5 \text{ kV}$$

Da $Q_{0i} + Q_{0e} = 0$ segue poi $V_e' = 0$ e $V_i' = -70.5 \text{ kV}$. Il lavoro meccanico compiuto dall'agente esterno per estrarre il dielettrico è pari alla variazione di energia elettrostatica del condensatore

$$W_m = \Delta U = \frac{Q^2}{2C_0} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{Q^2}{2C_0} \frac{\chi}{\chi + 1} = \frac{Q^2 \log(r_e/r_i)}{4\pi \epsilon_0 L} \frac{\chi}{\chi + 1} = 0.185 \text{ J}$$

Soluzione del problema 2

(a) L'impedenza totale del circuito serie RL : $Z = R + j\omega_0 L$, il suo modulo vale $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 58.1\Omega$

La corrente massima nel circuito : $I_0 = \frac{V_{0,\text{in}}}{|Z|} = 0.17\text{A}$. La tensione massima ai capi dell'induttore è dunque:

$$V_{0,\text{out}} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L V_{0,\text{in}}}{|Z|} = 5.08\text{V}$$

Lo sfasamento tra la corrente e la tensione di alimentazione è:

$$\varphi = \arctan(\omega_0 L / R) = 0.53 \text{ rad}(30.5^\circ),$$

quello tra V_{out} e V_{in} è pertanto:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right) = 1.04 \text{ rad } (59.5^\circ)$$

(b) La potenza erogata dal generatore è $\mathcal{P} = V_{0,\text{in}} I_0 e^{2i\omega_0 t + \varphi}$, il cui massimo vale:

$$\mathcal{P}_0 = V_{0,\text{in}} I_0 \cos\varphi = 7.3\text{W}.$$

(c+d) Per avere V_{out} in fase con V_{in} , dobbiamo inserire un elemento che compensi la reattanza induttiva. Questo si ottiene con un **condensatore** C in parallelo ad L , in condizioni di risonanza:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \approx 225 \text{ nF}$$

Nella configurazione risonante, l'impedenza vista dal generatore puramente resistiva (R). La corrente massima :

$$I'_0 = \frac{V_{0,\text{in}}}{R} = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ A}$$

Soluzione del problema 3

(a) In riflessione, lo sfasamento $\Delta\phi$ tra i primi due raggi uscenti dalla faccia superiore della lamina (raggi "a" e "b") è

$$\Delta\phi = kn \cdot 2d - \pi = \frac{4\pi}{\lambda} nd - \pi$$

dove il primo termine è dovuto al percorso del raggio "b" compiuto attraverso la lamina (non ci sono salti di fase nelle due trasmissioni e la riflessione sulla superficie inferiore) e il secondo termine (π) è dovuto al salto di fase in riflessione del raggio "a". I massimi in riflessione avranno una lunghezza d'onda che soddisfa la condizione:

$$\Delta\phi = 2m\pi, \quad m \in 0, 1, 2, \dots$$

da cui

$$\lambda = \frac{4nd}{2m+1}$$

Per i diversi valori di m si trova:

$$m = 0 \quad \lambda = 3360 \text{ nm}$$

$$m = 1 \quad \lambda = 1120 \text{ nm}$$

$$m = 2 \quad \lambda = 672 \text{ nm}$$

$$m = 3 \quad \lambda = 480 \text{ nm}$$

$$m = 4 \quad \lambda = 373 \text{ nm}$$

Nell'intervallo 450-700 nm sono quindi comprese solo le due lunghezze d'onda

$$\lambda_1 = 672 \text{ nm} \quad \lambda_2 = 480 \text{ nm}$$

(b) Siccome $\lambda_1 = 672 \text{ nm}$ e $\lambda_2 = 480 \text{ nm}$ corrispondono ai massimi di ordine $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$, rispettivamente, gli sfasamenti richiesti sono

$$\Delta\phi_1 = 2\pi m_1 = 4\pi \quad \text{e} \quad \Delta\phi_2 = 2\pi m_2 = 6\pi$$

(c+d) Consideriamo l'interferenza dei primi due raggi riflessi verso l'alto (raggi "a" e "b"). In generale, l'intensità del fascio riflesso sarà pari a

$$I_R = I_a + I_b + 2\sqrt{I_a I_b} \cos \Delta\phi$$

Siamo in condizioni di massimo di interferenza e infatti per λ_1 lo sfasamento $\Delta\phi_1 = 4\pi$. Inoltre:

$$I_a = RI_1 = 0.139 \text{ W/cm}^2 \quad \text{e} \quad I_b = RT^2 I_1 = 0.131 \text{ W/cm}^2$$

con

$$R = r^2 = \left(\frac{n_{aria} - n}{n_{aria} + n} \right)^2 = 0.028 \quad \text{e} \quad T = 1 - R = 0.972$$

coefficienti di Fresnel per incidenza normale.

Con questi valori risulta

$$I_{R1} = I_1 R(1 + T)^2 = 0.540 \text{ W/cm}^2 = I'_{R1}$$

Il risultato è indipendente dalla polarizzazione perchè siamo in condizioni di incidenza normale.

Ad un risultato simile si poteva giungere notando che le intensità $I_a \simeq I_b$ per cui si poteva scrivere

$$I_{R1} \simeq 4I_a = 0.556 \text{ W/cm}^2$$

Tale risultato differisce di meno del 3% dal valore corretto prima calcolato.