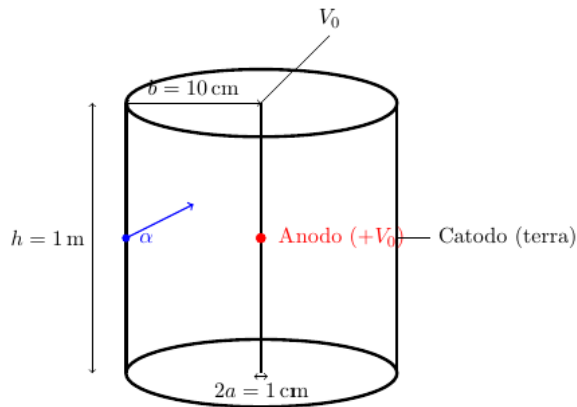


Fisica Generale 2: Secondo appello estivo - Prova del 08/07/2025

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



Un contatore Geiger consiste di un filo (anodo) a sezione circolare di raggio $a = 0.5$ cm e un sottile conduttore cilindrico cavo coassiale col cavo di raggio interno $b = 10$ cm e altezza $h = 1$ m. Il cilindro è connesso a terra mentre il filo è connesso ad un generatore di forza elettromotrice costante $\mathcal{V}_0$.

(a) Calcolare il massimo valore di $\mathcal{V}_0$ sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è $\mathcal{R} = 3$ MV/m.

Sia $\mathcal{V}_0 = 25$ kV.

(b) Calcolare la densità di carica sulla superficie interna del cilindro.

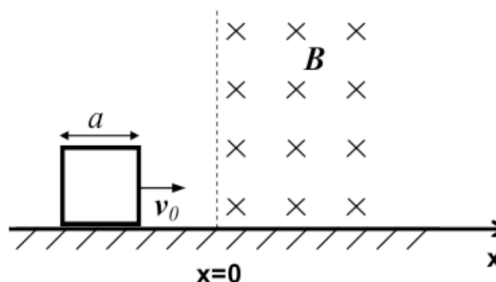
Una sorgente di particelle α (nuclei di elio, con massa $m = 6.64 \times 10^{-27}$ Kg, carica $q = 2e = 3.2 \times 10^{-19}$ C) posta sulla superficie interna del cilindro, al suo centro, emette isotropicamente particelle di energia cinetica U_0 . Calcolare:

(c) il minimo valore di U_0 perchè le particelle possano depositarsi sulla superficie del cavo;

(d) la distanza di massimo avvicinamento all'asse del filo r_{min} se le particelle vengono emesse con energia $U_0 = 15$ KeV;

(e) la distanza di massimo avvicinamento r'_{min} delle particelle emesse ad un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto alla direzione che congiunge la sorgente con l'asse del sistema (mantenendo la stessa energia $U_0 = 15$ MeV).

Problema 2.



Una spira quadrata di massa $m = 10$ g, lato $a = 20$ cm e resistenza $R = 1 \Omega$ è vincolata a giacere nel piano verticale (xy) e può scivolare senza attrito lungo l'asse orizzontale x come in figura. La spira,

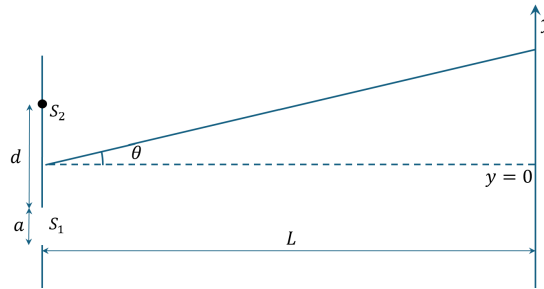
in cui inizialmente non scorre corrente, viene lanciata con velocità iniziale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ ($v_0 = 0.5 \text{ m/s}$) verso la regione $x > 0$ dove esiste un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 = 0.5 \text{ T}$). Si consideri la spira orientata convenzionalmente come l'asse z e se ne trascuri l'autoinduttanza. Ad un istante per il momento non precisato il lato destro della spira parallelo all'asse y , di coordinata x_s , entra nella regione con campo magnetico. Calcolare:

- (a) la corrente I_s^* indotta nella spira e la forza magnetica $\vec{F}_m^* = F_m^* \vec{u}_x$ agente su di essa (specificando direzione e verso) nella situazione in cui la spira è parzialmente entrata nella regione con campo magnetico $0 < x_s < a$ ed ha raggiunto la velocità $\vec{v}_s^* = v_s^* \vec{u}_x$, con $v_s^* = 0.45 \text{ m/s}$;
- (b) la posizione x_s^* in cui si trova la spira quando raggiunge la velocità v_s^* .

Sia ora $t_0 = 0$ l'istante in cui la spira comincia ad entrare nella regione con campo magnetico: $x_s(t_0) = 0$. Calcolare:

- (c) l'istante t_1 in cui la spira entra completamente nella regione con campo magnetico, $x_s(t_1) = a$, e la sua velocità $v_s(t_1)$ in tale istante;
- (d) la posizione $x_s(t_2)$ e la velocità $v(t_2)$ della spira all'istante $t_2 = 3t_1$.

Problema 3.



Una fenditura lunga e stretta, S_1 , (larghezza $a = 20 \mu\text{m}$) e una sorgente puntiforme, S_2 , sono separate di $d = 53 \mu\text{m}$ (distanza misurata rispetto al bordo superiore della fenditura) e sono poste a distanza $L = 50 \text{ cm}$ da uno schermo (figura). La sorgente S_2 è inizialmente spenta mentre la fenditura è costantemente investita da sx da onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$. In queste condizioni si vedono sullo schermo delle bande luminose e scure. L'intensità massima (al centro dello schermo, $y = 0 \leftrightarrow \theta = 0$) è $I_0 = 3 \text{ W/m}^2$.

- (a) Si trovi in quale punto dello schermo, $y_1 > 0$, l'intensità misurata è $I(y_1) = 25/36 I_0$. *Hint: può essere utile ricordare che $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6}$.*

Si assuma ora e per il resto del problema che anche la sorgente puntiforme S_2 sia accesa, emetta onde EM sincrone e con la medesima polarizzazione di quelle emesse dalla fenditura. La sorgente S_2 emette isotropicamente con potenza $P_2 = 4\pi L^2 I_0$.

- (b) Calcolare l'ampiezza massima del campo elettrico risultante al centro dello schermo (in $y = 0$), $E_R(0)$, e in y_1 , $E_R(y_1)$.

Davanti alla sorgente S_2 viene posta una lamina di materiale dielettrico di indice di rifrazione $n = 2.38$.

- (c) Calcolare lo spessore minimo (non nullo), s_{min} , per cui si abbia intensità massima in $y = 0$ (si trascurino le riflessioni multiple).

- (d) Sia ora lo spessore della lamina pari a $s' = 1.5 s_{min}$. Calcolare l'intensità misurata nello schermo in $y_2 = 2.5 \text{ cm}$.

Soluzione del problema 1

Dati iniziali

- Raggio anodo: $a = 0.5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Raggio catodo: $b = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$
- Altezza: $h = 1 \text{ m}$
- Rigidità dielettrica aria: $\mathcal{R} = 3 \text{ MV/m}$
- Tensione applicata: $V_0 = 25 \text{ kV}$
- Carica particella α : $q = 2e = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Massa particella α : $m = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$

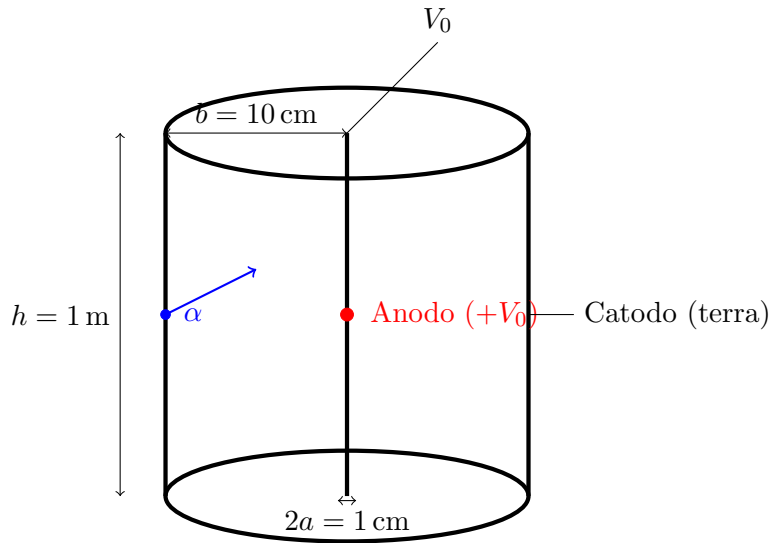


Figure 1: Schema del contatore Geiger con particella α emessa dal catodo

(a) Campo di un filo $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$,

Potenziale $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/r)$ (n.b. $V(b) = 0$)

Il campo elettrico massimo si ha a $\rho = a$, $E_{max} = \frac{V_0^{max}}{a \ln(b/a)} \leq \mathcal{R}$

$$V_0^{max} = \mathcal{R} a \ln(b/a) = 3 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-3} \times \ln(20) = 45 \text{ KV}$$

(b) Per $V_0 = 25 \text{ kV}$, il campo alla superficie interna ($\rho = b$):

$$E(b) = \frac{V_0}{b \ln(b/a)} = \frac{25000}{0.1 \ln(20)} = 83.5 \text{ kV/m}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 E(b) = -8.85 \times 10^{-12} \times 83.5 \times 10^3 = -7.4 \times 10^{-7} \text{ Cm}^{-2}$$

In alternativa possiamo prima ricavare la densità lineare di carica sull'anodo:

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln(b/a)} = 4.64 \times 10^{-7} \text{ C/m}$$

e ricavare:

$$Q_{catodo} = -Q_{anodo} = -\lambda h, \quad \sigma = \frac{Q_{anodo}}{h2\pi b} = -\frac{\lambda}{2\pi b}$$

(c) Le particelle raggiungono l'anodo se la loro energia cinetica iniziale è maggiore o uguale della differenza di energia potenziale tra il catodo (dove è ubicata la sorgente) e il catodo. Condizione per raggiungere l'anodo:

$$U_0 \geq |qV_0| = 2 \times 25 \times 10^3 eV = 50 keV = 8 \times 10^{-15} J$$

(d) Conservazione energia:

$$U_0 = qV(r_{min}) = \frac{2e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/r_{min})$$

$$\ln(b/r_{min}) = \frac{\pi\epsilon_0}{\lambda} \frac{U_0}{e} = 0.9$$

$$r_{min} = be^{-0.9} = 0.04m$$

(e) Si conservano energia e momento angolare. Nel punto di massimo avvicinamento la componente radiale della velocità del corpo è nulla. La velocità iniziale delle particelle α è:

$$v_0 = \sqrt{2U_0/m} = 1.1 \times 10^5 m/s.$$

Per la conservazione del momento angolare rispetto all'asse del sistema abbiamo:

$$mv_0 b \sin \theta = mv_{min} r'_{min}, \quad v_{min} = v_0 \sin \theta b / r'_{min}$$

Per la conservazione dell'energia abbiamo:

$$U_0 = \frac{1}{2} m v_{min}^2 + qV(r'_{min}) = \frac{1}{2} m (v_0 \sin \theta \frac{b}{r'_{min}})^2 + \frac{e\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln(\frac{b}{r'_{min}})$$

L'equazione può essere risolta numericamente, ma il problema è considerato corretto se l'equazione risolvente è giustamente impostata.

Soluzione del problema 2

(a) Per $0 < x_s < a$, applicando la legge di Faraday-Lenz e la legge di Ohm:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} [(-B_0) a x_s] = B_0 a v_s \quad \Rightarrow \quad I_s = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B_0 a}{R} v_s$$

Alla forza magnetica $\vec{F}_m$ agente sulla spira contribuiscono solo le parti immerse nel campo magnetico. I contributi dei due lati paralleli all'asse x si annullano reciprocamente, mentre dei lati paralleli all'asse y contribuisce solo quello di destra:

$$d\vec{F}_m = I_s d\vec{s} \times \vec{B} = I_s dy \vec{u}_y \times (-B_0) \vec{u}_z = -I_s B_0 dy \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \quad F_m = -I_s B_0 \left(\int_0^a dy \right) = -I_s B_0 a = -\frac{(B_0 a)^2}{R} v_s$$

$$I_s^* = \frac{B_0 a}{R} v_s^* = 45.0 \text{ mA} \quad F_m^* = -\frac{(B_0 a)^2}{R} v_s^* = -4.50 \times 10^{-3} \text{ N}$$

(b) Per $0 < x_s < a$, l'equazione del moto della spira fornisce, con la condizione $v_s(x_s = 0) = v_0$:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{F_m}{m} = -\frac{(B_0 a)^2}{m R} v_s = -\frac{(B_0 a)^2}{m R} \frac{dx_s}{dt} \Rightarrow \frac{dv_s}{dx_s} = -\frac{1}{\tau} \quad \left(\tau = \frac{m R}{(B_0 a)^2} = 1 \text{ s} \right)$$

da cui, ricordando che $v_s = v_0$ per $x_s = 0$:

$$x_s^* = (v_0 - v_s^*) \tau = 5 \text{ cm}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare risolvendo le equazioni del moto per $v_s(t)$ e $x_s(t)$.

(c) Per $0 < x_s < a$, dalle equazioni per $v_s(t)$ e $x_s(t)$ con le condizioni $v_s(0) = v_0$, $x_s(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} = \frac{F_m}{m} = -\frac{1}{\tau} v_s(t) &\Rightarrow v_s(t) = v_0 e^{-t/\tau} \\ x_s(t) = \int_0^t dt' v_s(t') = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) &\Rightarrow a = x_s(t_1) = v_0 \tau (1 - e^{-t_1/\tau}) \\ \Rightarrow t_1 = -\tau \log \left(1 - \frac{a}{v_0 \tau} \right) = 0.511 \text{ s} & \quad v_s(t_1) = v_0 e^{-t_1/\tau} = v_0 - \frac{a}{\tau} = 0.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(d) Al tempo $t_2 = 3t_1 > t_1$, e più in generale per ogni $t > t_1$, siamo invece nel regime $x_s(t) > a$ in cui tutti i lati della spira sono immersi nel campo magnetico, $F_m = 0$ e la spira si muove con velocità costante $v_s(t) = v_s(t_1)$. Dunque:

$$\begin{aligned} v_s(t_2) &= v_s(t_1) = 0.3 \text{ m/s} \\ x_s(t_2) &= a + v_s(t_1) (t_2 - t_1) = a + 2 v_s(t_1) t_1 = 50.6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Soluzione del problema 3

(a) La figura sullo schermo è quella generata da un'onda diffratta attraverso una fenditura di larghezza a . Per cui

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \right)^2 \quad \text{con} \quad \alpha = ka \sin \theta$$

Definiamo la fase α_1 per cui si ha $I(\alpha_1) = \frac{25}{36} I_0$:

$$I(\alpha_1) = I_0 \left(\frac{\sin(\alpha_1/2)}{\alpha_1/2} \right)^2 = \frac{25}{36} I_0 \rightarrow \sin \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) = \frac{5}{6} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)$$

Sfruttando l'approssimazione suggerita:

$$\sin \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \simeq \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)^3 = \frac{5}{6} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \rightarrow \alpha_1 = 2$$

La risoluzione numerica più precisa porterebbe a $\alpha_1 = 2.053$.

Dalla fase $\alpha_1 = ka \sin \theta_1 = 2$ si ricava

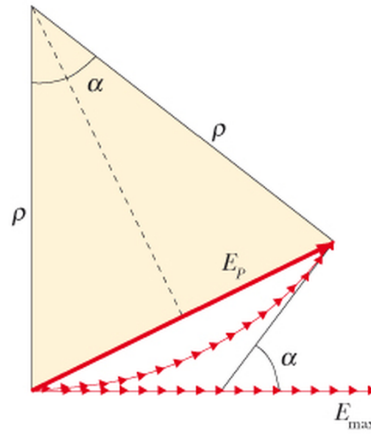
$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{1}{\pi} = 7.96 \times 10^{-3}$$

Da cui

$$y_1 = L \tan(\theta_1) = 4.0 \text{ mm}$$

(b) Nel centro dello schermo le onde giungono in fase poichè le sorgenti sono sincrone e $d \ll L$. Quindi

$$E_R(0) = 2E_1(0) = 2\sqrt{\frac{2I_0}{\epsilon_0 c}} = 95.1 \text{ V/m}$$



Per calcolare l'intensità dell'onda risultante in y_1 si devono conoscere l'intensità delle due onde provenienti da S_1 e S_2 e il loro sfasamento relativo. Le intensità sono note in quanto $I_1(\theta_1) = \frac{25}{36} I_0$ e $I_2(\theta_1) \simeq I_2(0) = I_0$. Notiamo come il campo elettrico dell'onda diffratta dalla fenditura osservato a grande distanza e ad un angolo θ abbia sfasamento $\alpha/2$ rispetto al campo dell'onda che si propaga a $\theta = 0$ come visibile nel diagramma dei fasori. Dal punto di vista della fase l'onda diffratta ha la fase della onda secondaria che parte dal centro della fenditura. Lo sfasamento tra l'onda che parte da S_1 e quella che parte da S_2 in un punto dello schermo lontano è quindi data da:

$$\delta = k(d + a/2) \sin \theta$$

Nel punto y_1 tale sfasamento risulta

$$\delta_1 = k(d + a/2) \sin \theta_1 = 6.3 \text{ rad} \simeq 2\pi$$

Le due onde sono in fase e quindi:

$$E_R(y_1) = E_1(y_1) + E_2(y_1) = \left(\frac{5}{6} + 1\right) E_0 = 87.2 \text{ V/m}$$

(c) A $\theta = 0$ lo sfasamento tra le due onde è dato da:

$$\delta_s = k(n - 1)s$$

Per avere massima intensità le onde devono interferire costruttivamente:

$$\delta_s = k(n - 1)s = 2\pi m \quad \rightarrow \quad s_{min} = \frac{\lambda}{n - 1} = 3.62 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(d) Il punto y_2 si trova all'angolo:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{y_2}{L}\right) = 5.00 \times 10^{-2}$$

per il quale

$$\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{2}ka \sin \theta_2 = 2\pi$$

Siamo in un minimo (il secondo) di diffrazione. L'intensità in y_2 è quindi data solo dal contributo di S_2 che risulta:

$$I_2(y_2) = T^2 I_0 = I_0 \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right)^2 = 2.08 \text{ W/m}^2$$