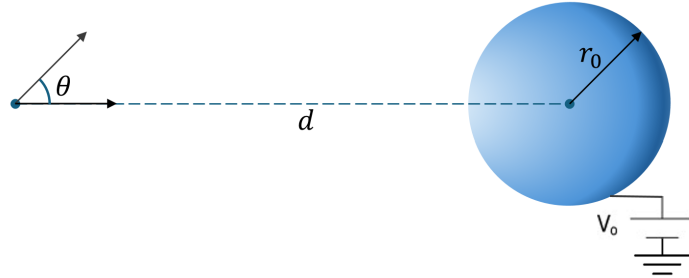


Fisica Generale 2: Primo appello estivo - Prova del 24/06/2025

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



Una sfera cava conduttrice di raggio $r_0 = 5 \text{ cm}$ è connessa ad un generatore di forza elettromotrice costante $\mathcal{V}_0$.

(a) Calcolare il massimo valore di $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_{max}$, sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è $\mathcal{R} = 3 \text{ MV/m}$.

Sia $\mathcal{V}_0 = 100 \text{ kV}$.

(b) Calcolare la densità di carica, σ , sulla superficie della sfera.

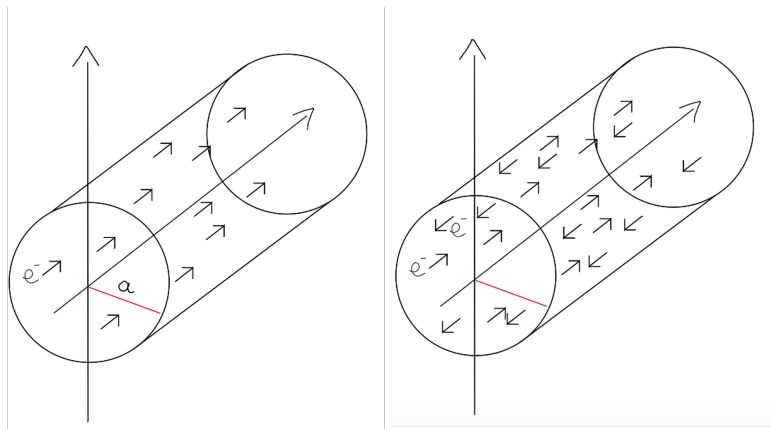
Un acceleratore di particelle α (nuclei di elio, con massa $m = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$, carica $q = 2e = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$) posto ad una distanza $d = 5 \text{ m}$ dal centro della sfera emette un fascio di particelle di energia cinetica U_0 , collimato lungo la direzione congiungente tra la sorgente e il centro (asse x). Calcolare:

(c) il minimo valore di U_0 , U_{min} , perchè le particelle possano depositarsi sulla superficie della sfera;

(d) la distanza di massimo avvicinamento delle particelle del fascio al centro della sfera, r_{min} , se $U_0 = 75 \text{ keV}$;

(e) la distanza di massimo avvicinamento, r'_{min} , se, mantenendo la stessa energia $U_0 = 75 \text{ keV}$, il fascio viene inclinato di un angolo $\theta = 45^\circ$.

Problema 2.



In un acceleratore di particelle viaggia un fascio di elettroni con velocità v prossima a quella della luce, $\frac{v}{c} = 1 - 10^{-9}$. Il fascio ha sezione circolare con raggio $a = 1 \text{ mm}$ e gli elettroni sono distribuiti

omogeneamente al suo interno. La corrente associata al fascio è $I = 1$ A. Detta $\rho = nq$ la densità di carica volumetrica (con n numero di elettroni per unità di volume e q carica dell'elettrone), calcolare:

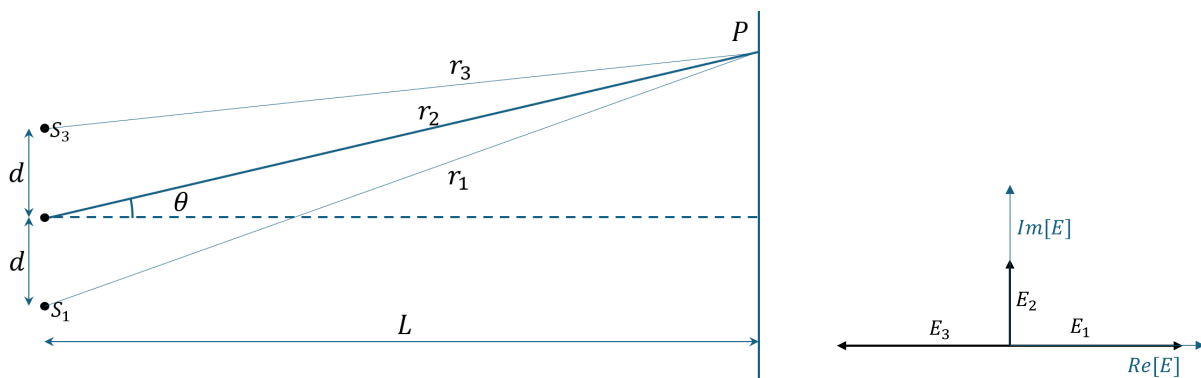
- il valore di ρ ;
- la forma funzionale del campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ e del campo magnetico $\vec{B}(\vec{r})$ ed il loro valore alla periferia del fascio, $r = a$;
- la forma funzionale della forza che agisce su un elettrone a distanza r dal centro del fascio, $\vec{F}_-(r)$, ed il suo valore per $r = a$.

In un certo punto dell'acceleratore il fascio di elettroni si incrocia con un fascio di positroni (identici agli elettroni ma con carica opposta). Il fascio di positroni ha le stesse caratteristiche del fascio di elettroni, con i positroni che viaggiano però in direzione opposta.

- Calcolare la forza $\vec{F}_+(a)$ che agisce su un positrone alla periferia della regione in cui i due fasci si incrociano.

Nota: il problema va considerato nel sistema di riferimento del laboratorio dove **non** sono presenti effetti relativistici

Problema 3.



Tre sorgenti sincrone (S_1, S_2, S_3) di onde EM armoniche giacciono su una stessa retta e sono spaziate di d . Le sorgenti sono poste a distanza $L \gg d$ da uno schermo (figura a sx). In un punto P dello schermo si pone un rivelatore in grado di misurare ampiezza massima e fase delle onde che vi giungono. Quando le sorgenti sono accese UNA alla volta si misura: • solo S_1 accesa: $|E_1| = 8$ V/m, $\phi_1 = \omega t$; • solo S_2 accesa: $|E_2| = 4$ V/m, $\phi_2 = \omega t + \pi/2$; • solo S_3 accesa: $|E_3| = 8$ V/m, $\phi_3 = \omega t + \pi$. Si assuma ora che le sorgenti siano tutte accese e che abbiano la medesima polarizzazione lineare. La rappresentazione per fasori per $t=0$ è quella in figura a dx.

- Calcolare l'intensità della radiazione misurata in P , $I(P)$.
- Calcolare l'intensità della radiazione misurata a $\theta = 0$ (centro dello schermo), $I(0)$.

Si assuma che $d = 20\lambda$.

- Spiegare se esiste o meno un valore di $\theta = \theta_0$ per cui si abbia $I(\theta_0) = 0$. Nel caso in cui esista trovare il più piccolo tra essi ($\theta_{0,min}$).
- Calcolare l'intensità del massimo secondario, I_{12} , tra i massimi principali di ordine 1 e ordine 2.

Soluzione del problema 1

(a) Calcolo del massimo valore di $\mathcal{V}_0$. Il campo massimo è limitato dalla rigidità dielettrica dell'aria:

$$E = \mathcal{V}_0/r_0 \leq \mathcal{R}; \quad \mathcal{V}_0 \leq \mathcal{R}r_0 = 150kV$$

$$\mathcal{V}_{0,max} = 150kV$$

(b) Calcolo della densità di carica sulla superficie,

$$E = \sigma/\epsilon_0;$$

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \mathcal{V}_0/r_0 = 1.77 \times 10^{-5} C/m^2$$

$$Q = 4\pi r_0^2 \sigma = 5.57 \times 10^{-7} C$$

(c) Energia minima U_0 per depositarsi sulla sfera. Conservo l'energia totale:

$$U_0 + 2eV(d) = U_f + 2e\mathcal{V}_0$$

dove $U_f = 0$ e si è posto $V(r_0) = \mathcal{V}_0$. Si ricava

$$U_0 = \frac{2eQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d} \right) = \frac{2eQ}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{r_0}{d} \right) = 2e\mathcal{V}_0 \left(1 - \frac{r_0}{d} \right) = 198 keV = 3.17 \times 10^{-14} J$$

Notiamo come $V(d)/V(r_0) = 10^{-2}$ quindi si poteva scrivere con buona approssimazione

$$U_0 = 2e\mathcal{V}_0 = 200keV = 3.2 \times 10^{-14} J$$

(d) Il punto di massimo avvicinamento corrisponde alla situazione in cui la velocità della particella annulla. Si impone la conservazione dell'energia totale e si usa $V(r) = \mathcal{V}_0 \frac{r_0}{r}$:

$$U_0 + 2eV(d) = 0 + 2eV(r_{min}) \rightarrow U_0 + 2e\mathcal{V}_0 \frac{r_0}{d} = 2e\mathcal{V}_0 \frac{r_0}{r_{min}} \rightarrow r_{min} = \left(\frac{U_0}{2e\mathcal{V}_0 r_0} + \frac{1}{d} \right)^{-1} = 1.30 \times 10^{-1} m$$

Trascurando l'energia potenziale iniziale (ipotesi ragionevole poichè $U_0 \gg 2e\mathcal{V}_0 \frac{r_0}{d} = 2keV$) si poteva ricavare

$$r_{min} = \frac{2e\mathcal{V}_0 r_0}{U_0} = 1.33 \times 10^{-1} m$$

(e) Se la velocità iniziale non è lungo la congiungente la particella non è a riposo nel punto di minima distanza, in quel punto è tuttavia nulla la componente radiale della velocità (quindi la velocità è ortogonale alla congiungente sfera-particella). Inoltre essendo la forza di Coulomb una forza centrale il momento angolare rispetto al centro di forza si conserva. Imponendo anche la conservazione dell'energia totale nel punto di massimo avvicinamento si trova:

$$\begin{cases} L_0 = mv_0 d \sin \theta = v_{min} r_{min} = L_{min} \\ \frac{1}{2} m v_0^2 + 2e\mathcal{V}_0 \frac{d}{r_0} = \frac{1}{2} m v_{min}^2 + 2e\mathcal{V}_0 \frac{d}{r_{min}} \end{cases}$$

Esplicitando $v_{min} = \frac{v_0 d \sin \theta}{r_{min}}$ si ottiene

$$\frac{1}{r_{min}^2} U_0 (d \sin \theta)^2 + \frac{1}{r_{min}} 2e\mathcal{V}_0 d - \left(U_0 + \frac{2e\mathcal{V}_0 d}{r_0} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r_{min} = 3.55 m$$

e $v_{min} = 1.89 \times 10^6 m/s$.

Anche in questo caso si poteva trascurare l'energia potenziale iniziale, trovando $r_{min} = 3.60 m$, $v_{min} = 1.87 \times 10^6 m/s$

Soluzione del problema 2

(a) Il fascio è assimilabile ad un filo percorso da corrente. Assumiamo che il filo sia parallelo all'asse z di un sistema di riferimento cilindrico e che la velocità degli elettroni sia $\vec{v} = v\vec{u}_z$. La densità di corrente volumetrica è data da:

$$\vec{j} = nq\vec{v} = -n|q|v\vec{u}_z$$

e visto che nel caso in esame la densità di corrente è uniforme ed ortogonale alla sezione del fascio, per la corrente I si ha:

$$I = -|\vec{j}|\pi a^2 \Rightarrow I = -n|q|v\pi a^2$$

opposta alla direzione di moto degli elettroni. E dunque:

$$\rho = nq = \frac{I}{\pi a^2 v} = -1.1 \times 10^{-3} \text{C/m}^2$$

(b) Per simmetria il campo elettrico sarà radiale e dipendente solamente dalla distanza dal centro. Possiamo perciò utilizzare il teorema di Gauss e calcolare il flusso del campo attraverso una superficie cilindrica di raggio r ed altezza h :

$$2\pi r h E(r) = \frac{\rho h \pi r^2}{\epsilon_0}$$

da cui

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{I r}{2\epsilon_0 \pi a^2 v} \vec{u}_r$$

rivolta verso il centro; in particolare $\vec{E}(a) = -59960 \vec{u}_r$ V/m. Analogamente il campo magnetico sarà parallelo a u_ϕ e dipendente solo dal raggio. Per la sua circuitazione lungo una circonferenza di raggio r si ha:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I(r)$$

con $I(r) = I \frac{r^2}{a^2}$, da cui

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\phi$$

avvolgente in senso orario attorno all'asse z ; in particolare $\vec{B}(a) = -2 \times 10^{-4} \vec{u}_\phi$ T.

(c) La forza di Lorentz agente sull'elettrone è:

$$\vec{F}_-(r) = q \left(\vec{E}(r) + \vec{v} \times \vec{B}(r) \right) = q (E(r) - v B(r)) \vec{u}_r = \frac{q I r}{2\pi a^2} \left(\frac{1}{\epsilon_0 v} - \mu_0 v \right) \vec{u}_r$$

che tale quantità sia in modulo estremamente piccola si può vedere ricordando che $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ ed esprimendola in termini di $\beta = v/c$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ (con $\gamma = 22360$ nel nostro caso):

$$\vec{F}_-(r) = \frac{q I r}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c} \right) \vec{u}_r = \frac{q I r}{2\pi a^2 \beta \gamma^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{u}_r$$

Per $r = a$ abbiamo $\vec{F}_-(a) = 1.9 \times 10^{-23} \vec{u}_r$ N.

(d) Il fascio di positroni contribuisce con una densità di carica pari e opposta a quella del fascio di elettroni e dunque il campo elettrico è nullo ovunque. I positroni si muovono in verso opposto a quello degli elettroni ma avendo carica opposta danno un contributo identico alla componente magnetica della forza di Lorentz che quindi è pari al doppio di quella calcolata al punto (c):

$$\vec{F}_+(r) = -q v \frac{\mu_0 I r}{\pi a^2} \vec{u}_r$$

ed in particolare per $r = a$ abbiamo $\vec{F}_+(a) = -1.9 \times 10^{-14} \vec{u}_r$ N.

Soluzione del problema 3

(a) I campi E_1 ed E_3 in P sono in opposizione di fase in ogni istante e in quadratura con E_2 . L'ampiezza risultante è:

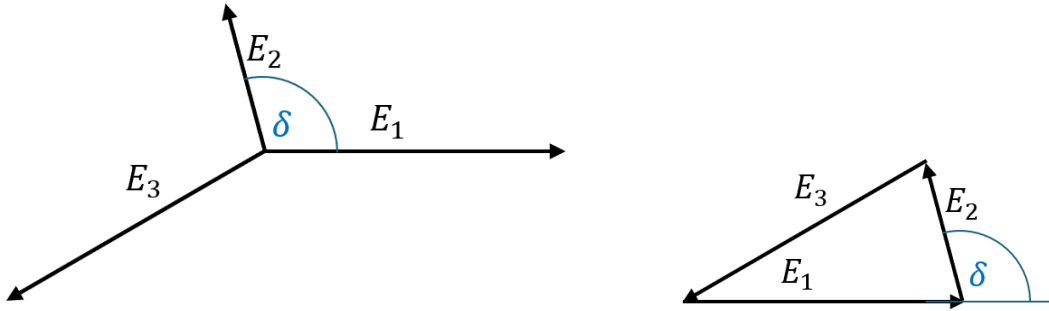
$$E_{TOT}(P) = E_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_2^2 = 2.12 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

(b) Nel centro dello schermo le onde giungono in fase poichè le sorgenti sono sincrone e $d \ll L$. Quindi

$$E_{TOT}(0) = E_1 + E_2 + E_3 = 5E_2 \quad \rightarrow \quad I(0) = 25I_2 = 5.31 \times 10^{-1} \text{ W/m}^2$$

(c) Scriviamo la forma dei campi complessi in un punto qualsiasi dello schermo individuato dall'angolo θ . A meno di una fase comune:

- $E_1(t) = |E_1|e^{i(\omega t - kr_1)}$
- $E_2(t) = |E_2|e^{i(\omega t - kr_2)} = |E_2|e^{i(\omega t - kr_1 + kd \sin \theta)} = |E_2|e^{i(\omega t - kr_1 + \delta)}$
- $E_3(t) = |E_3|e^{i(\omega t - kr_3)} = |E_3|e^{i(\omega t - kr_1 + 2kd \sin \theta)} = |E_3|e^{i(\omega t - kr_1 + 2\delta)}$



Per avere intensità nulla è necessario che i tre fasori formino un triangolo o giacciano tutti su una stessa retta. Il secondo caso non è realizzabile poichè nessuna combinazione $\pm|E_1| \pm |E_2| \pm |E_3|$ può risultare 0. Il primo caso è facilmente realizzabile in quanto le espressioni scritte sopra mostrano come il fasore E_2 giaccia, $\forall \theta$, sulla bisettrice dei fasori E_1 e E_3 che essendo uguali in modulo hanno la risultante sulla bisettrice. È quindi sufficiente trovare l'angolo tra E_1 e E_3 tale da dare una risultante con modulo pari a E_2 (ma verso opposto).

Un altro modo per giungere alla stessa conclusione è quella di cercare la configurazione di E_1 , E_2 e E_3 che forma un triangolo. Da notare che l'angolo tra E_1 e E_2 e quello tra E_2 e E_3 devono essere uguali ($= \delta$). Questa richiesta è compatibile con quella di configurazione a poligonale chiusa poichè $|E_1| = |E_3|$ e quindi E_1 , E_2 e E_3 possono formare un triangolo (isoscele) di base E_2 .

Con entrambi gli approcci lo sfasamento risulta:

$$\delta_0 = \pi - \arccos\left(\frac{|E_2|}{2|E_1|}\right) = 1.82 \text{ rad} = 104.5 \text{ deg}$$

Questo sfasamento corrisponde a

$$\delta_0 = kd \sin \theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = \arcsin\left(\frac{\delta}{kd}\right) = 1.45 \times 10^{-2}$$

(d) Il massimo secondario tra due massimi principali si trova per $\delta_{sec} = 2\pi(m + 1/2)$, cioè nel punto di mezzo tra due max principali. In questa situazione E_1 e E_3 sono paralleli e concordi e opposti a E_2 (lo sfasamento relativo tra sorgenti consecutive è 3π). Il campo risultante ha ampiezza massima

$$|E_{sec}| = |E_1| + |E_3| - |E_2| = 12 \text{ V/m}$$

I massimi secondari hanno quindi intensità

$$I_{sec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_{sec}|^2 = 1.91 \times 10^{-1} \text{ W/m}^2$$

Si può trascurare una eventuale riduzione dell'intensità dovuta alla distanza dalle sorgenti in quanto i massimi di ordine 1 e 2 si trovano a piccoli angoli ($\theta_{max,1} \simeq \frac{\lambda}{d} = \frac{1}{20}$) e quindi la distanza dalle sorgenti è approssimativamente pari a L .