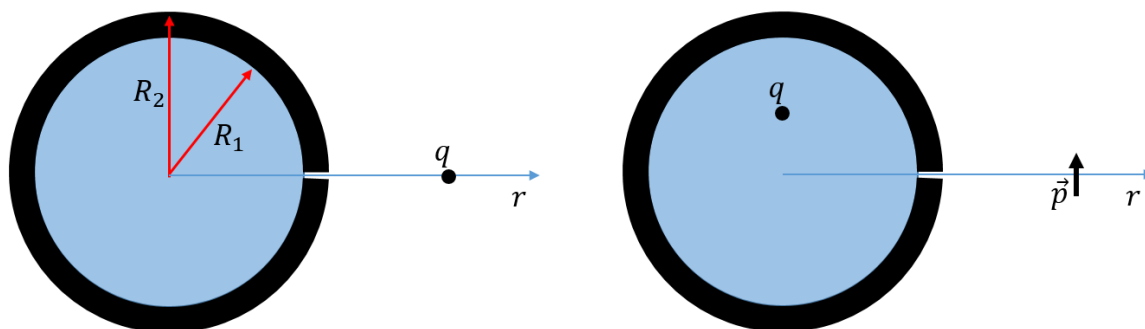


Fisica Generale 2: Secondo appello - Prova del 12/02/2025

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



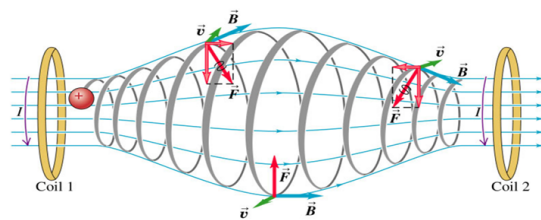
Una piccola carica positiva $q = 2 \times 10^{-8} \text{ C}$ viene introdotta attraverso un piccolo foro all'interno di un guscio metallico sferico, di raggio interno $R_1 = 15 \text{ cm}$ e raggio esterno $R_2 = 16 \text{ cm}$, inizialmente scarico, e portata al centro del guscio. Il guscio è riempito con un gel isolante globalmente neutro e di costante dielettrica $\kappa_e = 3.0$

- (a) Calcolare il potenziale elettrostatico per $r > R_2$ e in particolare per $r = 2R_2$
- (b) Calcolare il potenziale elettrostatico per $r < R_2$ e in particolare per $r = R_1/2$

Si porti ora la carica a distanza $r = R_1/2$ dal centro del sistema

- (c) Calcolare il potenziale elettrostatico per $r > R_2$ e in particolare per $r = 2R_2$
- (d) Calcolare il lavoro necessario per portare un piccolo dipolo elettrico $p = 3 \times 10^{-12} \text{ Cm}$ da una distanza molto elevata fino a $r = 2R_2$, l'orientamento finale del dipolo è ortogonale all'asse r (figura a dx). La presenza del dipolo non perturba la distribuzione di carica sul guscio.

Problema 2.



La figura in questione mostra una trappola magnetica. In corrispondenza delle due bobine poste alle estremità ("Coil 1" e "Coil 2") è presente un campo magnetico intenso e uniforme, $B_1 = 0.5 \text{ T}$, $B_2 = 0.25 \text{ T}$, mentre al centro dell'apparato, ad uguale distanza dalle due bobine, il campo magnetico è in buona approssimazione uniforme e vale $B_0 = 0.1 \text{ T}$. Al centro del sistema viene posta una sorgente di neutroni a riposo, che vengono emessi con un momento magnetico ($\mu_n = 9.66 \times 10^{-27} \text{ Am}^2$) parallelo e concorde con la direzione di B .

(a) dire, in queste condizioni, quale delle due bobine viene raggiunta dal neutrone, motivando la risposta, e calcolare la velocità v_n del neutrone quando esso transita per la bobina in questione.

Si supponga viceversa che nell'apparato vengano iniettati dei protoni. Uno di questi (figura) transita per la prima bobina con una energia cinetica $U_{K1} = 30 \times 10^{-15} \text{ J}$ descrivendo un'elica il cui raggio, nel piano perpendicolare alle linee (parallele) del campo $\mathbf{B}_1$ vale $r_1 = 10 \text{ cm}$. Calcolare:

- (b) la componente della velocità del protone $v_{\perp}$ nella direzione ortogonale al campo magnetico;
- (c) la componente della velocità del protone $v_{//}$ nella direzione del campo magnetico;
- (d) l'energia cinetica del protone $U_{K,0}$ in eV quando esso transita per il centro dell'apparato;
- (e) il raggio di curvatura r_0 dell'elica in quest'ultima posizione (suggerimento: si osservi la traiettoria e si ricordi che B è un campo solenoidale).

(Si assuma che la massa del protone sia uguale a quella del neutrone, $m_p = m_n = 1.7 \times 10^{-27} \text{ Kg}$. La carica del protone vale $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$).

Problema 3.

Un fascio di luce polarizzato circolarmente, di potenza $P_0 = 0.5 \text{ W}$ e sezione $A_0 = 1 \text{ mm}^2$, incide su una lastra di vetro di indice di rifrazione $n_{las} = 1.4$. Sapendo che il fascio riflesso è polarizzato linearmente, si calcoli:

- (a) gli angoli di incidenza θ_i e di rifrazione (trasmissione) θ_t ;
- (b) l'intensità del fascio riflesso I_R ;
- (c) l'intensità del fascio trasmesso I_T .

Supponiamo ora di immergere la lastra in un liquido trasparente avente indice di rifrazione $n_{liq} = 1.1$. Se il nuovo angolo di incidenza $\theta'_i = 80^\circ$, si determini:

- (d) l'intensità del fascio riflesso in queste condizioni I'_R .

Soluzione del problema 1

(a) Il sistema ha simmetria sferica e all'interno di una sfera di Gauss di raggio $r > R_2$ è contenuta una carica totale q . Il campo e il potenziale per $r > R_2$ sono quindi quelli di Coulomb

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow V(2R_2) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R_2} = 562 \text{ V}$$

(b) Il campo all'interno del guscio è ancora quello di Coulomb, all'interno di un dielettrico normale. Inoltre per $R_1 \leq r \leq R_2$ non c'è campo, per cui $V(R_1) = V(R_2)$

$$V(r < R_1) = \int_r^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(R_1)$$

da cui

$$V(R_1/2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\kappa_e R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 1.52 \times 10^3 \text{ V}$$

(c) Il campo e il potenziale all'esterno del guscio non sono cambiati.

$$V'(2R_2) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R_2} = 562 \text{ V}$$

(d) In generale un dipolo in un campo elettrostatico è soggetto a una forza

$$\vec{F}_e = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Il lavoro della forza elettrostatica cui è soggetto un dipolo si può scrivere come

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \vec{p} \cdot (\vec{E}(b) - \vec{E}(a))$$

Nel caso in questione si ha $\vec{E}$ campo coulombiano, per cui

$$\vec{E}(a) = \vec{E}(\infty) = 0$$

mentre

$$\vec{E}(b) = \vec{E}(2R_2) = \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{r}$$

Essendo $\vec{p}$ ortogonale a $\hat{r}$ si ha

$$W_{\infty \rightarrow 2R_2} = 0$$

Questo è il lavoro della $\vec{F}_e$ che è l'opposto del lavoro della forza esterna.

Al medesimo risultato si poteva giungere calcolando esplicitamente il lavoro della forza. Si può procedere in due modi: calcolare la $\vec{F}_e$ cui è soggetto il dipolo immerso in un campo coulombiano; calcolare la forza cui è soggetto il guscio immerso nel campo del dipolo e quindi invocare il principio di azione-reazione (valido in elettrostatica). La seconda via è più agevole una volta notato che il campo del guscio è equivalente al campo di una carica puntiforme posta nel suo centro. Il campo elettrico generato da un dipolo elettrico è descritto (in coordinate sferiche) da

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

La carica (il guscio) si trova a $\theta = \pi/2$ per cui il campo elettrico è (anti)parallelo a $\vec{p}$ e così anche la forza elettrica sulla carica. Spostando la carica da distanza infinita fino a $r = 2R_2$ lungo l'asse r si ha

$$W_{\infty \rightarrow 2R_2} = 0$$

in quanto la forza è sempre ortogonale allo spostamento.

L'approccio simmetrico è più laborioso dal punto di vista del calcolo. Il coordinate sferiche i vettori campo elettrico del guscio e momento di dipolo elettrico sono:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad \vec{p} = p(\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

La forza cui è soggetto il dipolo risulta

$$\begin{aligned} \vec{F}_e = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) &= \partial_r(\vec{p} \cdot \vec{E}) \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta(\vec{p} \cdot \vec{E}) \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi(\vec{p} \cdot \vec{E}) \hat{\phi} = \\ &= -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \end{aligned}$$

Per $\theta = \pi/2$:

$$\vec{F}_e = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\theta}$$

che è ortogonale a $\hat{r}$ e quindi compie lavoro nullo per uno spostamento radiale da ∞ a $2R_2$.

Soluzione del problema 2

(a) L'energia potenziale del neutrone è $U_P = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B}$, quindi abbiamo:

$$U_{P,0} = -0.97 \times 10^{-27} \text{ J}, \quad U_{P,1} = -4.8 \times 10^{-27} \text{ J}, \quad U_{P,2} = -2.4 \times 10^{-27} \text{ J}.$$

Poichè il minimo dell'energia potenziale sta in prossimità della prima bobina il neutrone si muove in quella direzione. Ricaviamo la velocità della particella imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$v_n = \sqrt{2U_k/m_n} = 2.13 \text{ m/s},$$

dove $U_K = \Delta U_K = -\Delta U_P = U_{P,0} - U_{P,1} = 3.86 \times 10^{-27} \text{ J}$

Anche la seconda bobina rappresenta un minimo locale dell'energia potenziale e come tale (se giustificata) rappresenta una soluzione al quesito. Valgono equazioni simili a quelle appena scritte con $U_K = \Delta U_K = -\Delta U_P = U_{P,0} - U_{P,2} = 1.45 \times 10^{-27} \text{ J}$ da cui

$$v_n = \sqrt{2U_k/m_n} = 1.31 \text{ m/s},$$

(b) Ricordiamo che tra il raggio di curvatura e l'impulso trasverso del protone vale la relazione: $mv_\perp = p_\perp = eBr$, da cui

$$v_\perp = \frac{e}{m} Br = 4.71 \times 10^6 \text{ m/s}$$

(c) $v^2 = 2U_K/m = 3.53 \times 10^{13} \text{ m}^2/\text{s}^2 = v_{//}^2 + v_\perp^2$, da cui $v_{//} = 3.63 \times 10^6 \text{ m/s}$ (d) L'energia cinetica resta invariata, quindi

$$U_{k,0} = \frac{30 \times 10^{-15}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 187 \text{ keV}$$

(e) La figura indica che la particella si muove tangenzialmente ad una linea del campo magnetico. Possiamo dunque calcolare il flusso del campo attraverso una superficie chiusa che ha per basi le due cerchi delimitati dalle orbite del protone nelle posizioni (1) e (0) rispettivamente, e per superficie laterale quella punto per punto tangente alle linee del campo: per costruzione il flusso attraverso questa é nullo. Avremo dunque:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \pi r_0^2 B_0 - \pi r_1^2 B_1 = 0,$$

$$r_0 = r_1 \sqrt{B_1/B_0} = 0.22\text{m}$$

Soluzione del problema 3

(a) Siccome il fascio riflesso é linearmente polarizzato, langolo di incidenza é quello di Brewster dato dalla formula:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{las}}{1} = 1.4$$

da cui $\theta_i = \theta_B = 54.5^\circ$. In condizioni di Brewster, $\theta_B + \theta_t = \pi/2$ e dunque $\theta_t = 35.5^\circ = 0.62\text{rad}$

(b) Il fascio di luce incidente polarizzato circolarmente può essere pensato come la sovrapposizione di due fasci polarizzati linearmente lungo due direzioni ortogonali, ad esempio x e y:

$$I_0 = I_x + I_y$$

con $I_x = I_y = I_0/2 = \frac{P_0}{2A_0} = 25\text{W/cm}^2 = 250\text{kW/m}^2$. Nel caso del problema é utile considerare il fascio incidente come la sovrapposizione di due fasci polarizzati linearmente sul piano π e σ , ossia $I_0 = I_\pi + I_\sigma$, con $I_\pi = I_\sigma = I_0/2$. L'intensità del fascio riflesso si può quindi calcolare come

$$I_R = R_\pi I_\pi + R_\sigma I_\sigma$$

dove $R_\pi = 0$ (condizioni di Brewster) e $R_\sigma = \frac{\sin^2(\theta_B - \theta_t)}{\sin^2(\theta_B + \theta_t)} = \sin^2(\theta_B - \theta_t) = 0.105$, da cui $I_R = 2.63\text{W/cm}^2$.

(c) Per la conservazione dell'energia, la potenza del fascio trasmesso è:

$$P_T = P_0 - P_R = P_0 - I_R A_0 = 0.474\text{W}$$

L'intensità del fascio trasmesso è quindi:

$$I_T = \frac{P_T}{A_T} = \frac{P_T}{A_0 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}} = 33.8\text{W/cm}^2$$

(d) È immediato verificare che l'angolo di incidenza θ'_i non soddisfa la condizione di Brewster:

$$\tan \theta'_i = \frac{n_{las}}{n_{liq}} = \frac{1.4}{1.1}$$

Pertanto l'intensità del fascio riflesso si calcola da:

$$I'_R = R'_\pi I_\pi + R'_\sigma I_\sigma$$

dove $R'_\pi = \frac{\tan^2(\theta'_i - \theta'_t)}{\tan^2(\theta'_i + \theta'_t)}$, $R'_\sigma = \frac{\sin^2(\theta'_i - \theta'_t)}{\sin^2(\theta'_i + \theta'_t)}$ e $\sin \theta'_t = \frac{n_{liq}}{n_{las}} \sin \theta'_i$.

Inserendo i valori numerici si trova che $R'_\pi = 0.233$, $R'_\sigma = 0.417$, $\theta'_t = 50.7^\circ$, da cui $I'_R = 16.2\text{W/cm}^2$.