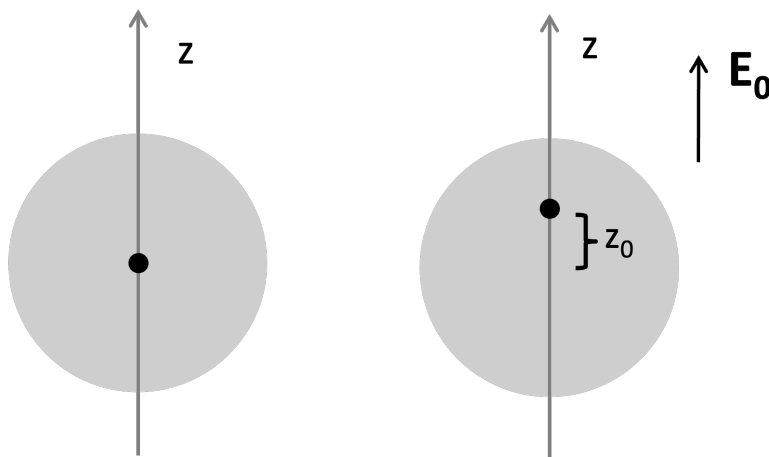


Fisica Generale 2: Primo appello - Prova del 20/01/2025

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



Un modello grezzo dell'atomo di idrogeno consiste in un nucleo puntiforme di carica $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, circondato da una sfera di raggio $a = 5 \times 10^{-11}$ m di carica opposta $-e$ uniformemente distribuita sul volume della sfera.

(a) Calcolare l'energia elettrostatica totale del sistema, U_T , data dalla somma dell'energia elettrostatica della distribuzione elettronica e l'energia di interazione tra il nucleo e la distribuzione elettronica (ponendo il potenziale di quest'ultima nullo all'infinito).

Viene ora applicato un campo elettrico esterno costante ed omogeneo $E_0 \vec{u}_z$. La nuova posizione di equilibrio del nucleo si ha per $\vec{r} = (0, 0, z_0)$ con $z_0 < a$.

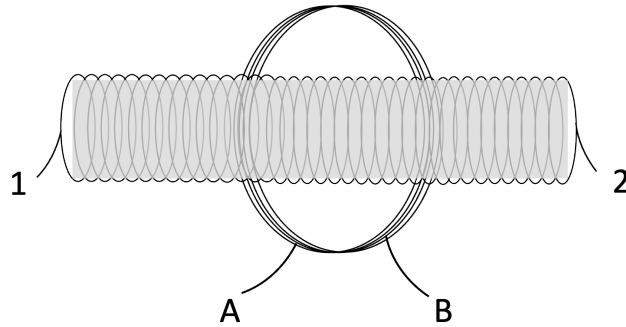
(b) Calcolare il valore di E_0 per cui $z_0 = a/2$.

Per tale valore di E_0 calcolare inoltre:

(c) il momento di dipolo $\vec{p}$ del sistema nucleo-distribuzione elettronica

(d) il lavoro L che occorre fare dall'esterno per portare l'atomo (già costruito, ma con il nucleo al centro della distribuzione elettronica) da una regione in cui il campo elettrico è nullo, alla regione in cui il campo è $\vec{E}_0$ (e quindi con il nucleo a $z_0 = a/2$).

Problema 2.



Una bobina circolare aperta di $N_{bob} = 150$ spire, area $A_{bob} = 2 \text{ cm}^2$, lunghezza $l_{bob} = 4 \text{ mm}$ e resistenza $R_{bob} = 5 \Omega$ racchiude un solenoide di lunghezza $L_{sol} = 20 \text{ cm}$ e resistenza $R_{sol} = 15 \Omega$ formato da $N_{sol} = 800$ spire serrate avvolte su un nucleo magnetico cilindrico di sezione circolare avente area $A_{sol} = 1 \text{ cm}^2$ e permeabilità magnetica relativa $K_m = 400$, come indicato in figura. Nell'approssimazione di solenoide infinito, si determini:

(a) il coefficiente di mutua induzione M del sistema solenoide-bobina ;

Quando il solenoide è collegato a un generatore di tensione alternata di frequenza $f = 50 \text{ Hz}$, nel solenoide circola una corrente efficace $I_0 = 5 \text{ A}$. Si calcoli:

(b) il valore efficace della tensione indotta ai capi A e B della bobina V_{AB} ;

(c) il valore efficace della tensione del generatore V_{12} che si deve collegare ai capi 1 e 2 del solenoide (si ricordi che la bobina è aperta);

(d) il valore efficace del flusso magnetico concatenato con la bobina Φ_{bob} e quello concatenato Φ_{sol} col solenoide.

Problema 3.

Un reticolo di diffrazione consiste di un gran numero di fenditure equidistanti, separate di un passo $a = 5.6 \mu\text{m}$, ciascuna di larghezza $b < a$. Un fascio di luce bianca (che comprende cioè tutte le lunghezze d'onda comprese nell'intervallo $390 \text{ nm} < \lambda < 780 \text{ nm}$), incide normalmente al piano delle fenditure.

La luce diffratta ad un angolo θ rispetto alla direzione del fascio viene analizzata e risulta composta da tre sole lunghezze d'onda, $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 466.7 \text{ nm}$, $\lambda_3 = 700 \text{ nm}$ sovrapposte. Calcolare:

(a) il valore di θ e l'ordine n_2 in cui viene osservata la lunghezza λ_2 ;

(b) il minimo valore di b compatibile con i dati;

(c) sapendo che il fascio ha una sezione $s = 1.2 \text{ mm}$, dire a quale ordine il reticolo potrebbe separare il segnale prodotto da due lunghezze d'onda molto vicine, corrispondenti al doppietto giallo del sodio: $\bar{\lambda} = 589.3 \text{ nm}$, $\delta\lambda = 0.6 \text{ nm}$. (Suggerimento: applicando il criterio di Rayleigh un doppietto è risolto quando un massimo principale di interferenza di una delle due onde coincide col minimo adiacente al massimo dell'altra).

Soluzione del problema 1

(a) Ricordiamo che il campo elettrico e potenziale di una sfera di raggio a uniformemente carica con carica totale $-e$ sono dati da:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \vec{u}_r & \text{se } r \leq a \\ -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{se } r \geq a \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 a^3} [3a^2 - r^2] & \text{se } r \leq a \\ -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq a \end{cases}$$

L'energia della distribuzione di carica elettronica si trova, ad esempio, integrando la densità di carica ed il potenziale:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{-3e}{4\pi a^3} \frac{-e}{8\pi\epsilon_0 a^3} [3a^2 - r^2] 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

mentre l'energia del nucleo nel potenziale della distribuzione elettronica è:

$$U_p = eV(0) = -\frac{3}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

L'energia totale è dunque:

$$U_T = U_e + U_p = \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{2}\right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{9}{10} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 4.14 \times 10^{-18} \text{ J}$$

(b) La posizione z_0 del nucleo è determinata dall'uguaglianza tra la forza esercitata su quest'ultimo dalla distribuzione elettronica e quella esercitata dal campo esterno e quindi per i moduli:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} z_0 = eE_0$$

da cui, ponendo $z_0 = a/2$, si ottiene:

$$E_0 = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 a^2} = 2.88 \times 10^{11} \text{ V/m}$$

(c) Per simmetria, la distribuzione elettronica è equivalente ad una carica $-e$ a distanza $z_0 = a/2$ dal nucleo, di carica $+e$. Il momento di dipolo è pari dunque a:

$$\vec{p} = ez_0 \vec{u}_z = e \frac{a}{2} \vec{u}_z = 4 \times 10^{-30} \vec{u}_z \text{ Cm}$$

(d) Nella configurazione iniziale -se l'atomo è considerato già costruito- l'energia elettrostatica è nulla. Per determinare il lavoro necessario per portare il sistema nella configurazione finale, possiamo distinguere due passaggi: il primo per portare l'atomo con il nucleo al centro nella regione dove è presente il campo esterno, il secondo per portare il nucleo a $z_0 = a/2$.

Il lavoro per compiere il primo passaggio è nullo visto che, detto $\phi(0)$ il potenziale del campo esterno al centro della sfera, l'energia elettrostatica del nucleo è $+e\phi(0)$, mentre quella della distribuzione elettronica è $-e\phi(0)$ (la distribuzione è assimilabile ad una carica puntiforme $-e$ al centro).

Il lavoro per compiere il secondo passaggio è invece dato da (meno) l'integrale delle forze dei campi che agiscono sul nucleo tra il centro della sfera e z_0 :

$$L = - \int_0^{z_0} \left(eE_0 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} z \right) dz = - \left(eE_0 z_0 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} z_0^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} z_0^2 = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E}_0 = -5.75 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Soluzione del problema 2

(a) Il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti, può essere calcolato a partire dal campo magnetico prodotto all'interno del solenoide. Nell'ipotesi di solenoide infinito, questo campo è dato da:

$$B_{sol} = \frac{\mu_0 K_m N_{sol} I_{sol}}{l_{sol}}$$

Il flusso di questo campo concatenato alla bobina è:

$$\phi_{bob} = N_{bob} B_{sol} A_{bob} = N_{bob} B_{sol} A_{sol}$$

perchè nell'ipotesi di solenoide infinito, il campo magnetico prodotto dalla corrente che circola nel solenoide è confinato solo al suo interno. Esplicitando si trova:

$$\phi_{bob} = \frac{\mu_0 K_m N_{sol} N_{bob} A_{sol}}{l_{sol}} I_{sol} = M I_{sol}$$

da cui si ottiene $M = 0.03 \text{ H}$.

(b) La tensione generata ai capi della bobina dovuta alla corrente che circola nel solenoide è data da:

$$V_{AB} = -M \frac{dI_{sol}}{dt} = -M \frac{d}{dt} \left(\sqrt{2} I_0 \sin(\omega t) \right)$$

dove $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$. Il suo valore efficace è quindi:

$$V_{AB} = M I_0 \omega = 47.3 \text{ V}$$

(c) L'equazione di maglia del generatore collegato alla bobina è:

$$V_{12} - L_{sol} \frac{dI_{sol}}{dt} - M \frac{dI_{bob}}{dt} = R_{sol} I_{sol}$$

dove L_{sol} è l'induttanza del solenoide. Siccome secondo il problema la bobina è aperta, $I_{bob} = 0$. Il circuito quindi diventa quello di un generatore collegato ad un'impedenza induttiva. Passando ai valori efficaci, si trova:

$$V_{12} = Z_{RL} I_{sol} = \sqrt{R_{sol}^2 + (\omega L_{sol})^2} I_{sol} = 264 \text{ V}$$

(dove $L_{sol} = \frac{\mu_0 K_m N_{sol}^2 A_{sol}}{l_{sol}} = 0.161 \text{ H}$).

(d) Il valore efficace del flusso magnetico concatenato con la bobina ϕ_{bob} è pari a:

$$\phi_{bob} = M I_0 = 0.15 \text{ Wb}$$

mentre quello concatenato con il solenoide è:

$$\phi_{sol} = L_{sol} I_0 = 0.8 \text{ Wb}$$

Soluzione del problema 3

(a) Massimi di interferenza: $a \sin\theta = n\lambda$, perciò abbiamo

$$\sin\theta = n_1\lambda_1/a = n_2\lambda_2/a = n_3\lambda_3/a$$

ossia:

$$n_1/n_3 = \lambda_3/\lambda_1 = 7/4,$$

$$n_1/n_2 = \lambda_2/\lambda_1 = 4.667/4 = 1.167 = 7/6$$

Quindi $n_1 = 7$, $n_3 = 4$, $n_2 = n_1\lambda_1/\lambda_2 = 6$ e $\sin\theta = n_1\lambda_1/a = 0.5$. (Le soluzioni con $n_1 = 14, n_2 = 12, n_3 = 8$ porgerebbero $\sin\theta = 1$ e non sono accettabili.

(b) si osserva che manca la lunghezza d'onda corrispondente al massimo di ordine 5 (per inciso $\lambda = 560nm$), che viene cancellato dalla diffrazione se a e b stanno in rapporto di interi: $a/b = n/m = 5/m$, ossia $b = ma/5$. Il minimo valore è

$$b = a/5 = 1.12\mu m$$

(c) Vengono investite dal fascio $N = s/a = 214$ fenditure. Il doppietto è risolto all'ordine p dato dalla relazione

$$\delta\lambda/\bar{\lambda} \geq 1/Np$$

ossia

$$p \geq \bar{\lambda}/\delta\lambda N = 4.6$$

quindi $p_{min} = 5$. Tuttavia quest'ordine manca, quindi il primo ordine utile è $p = 6$.