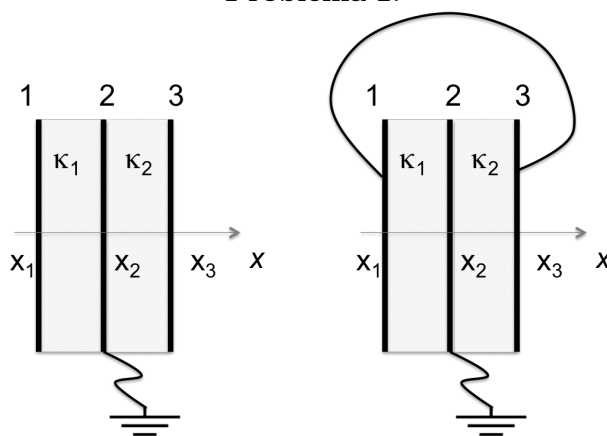


Fisica Generale 2: Prova scritta del 22/11/2024

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

$$[m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}, q_e = -1.60 \times 10^{-19} \text{ C}, \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2]$$

Problema 1.



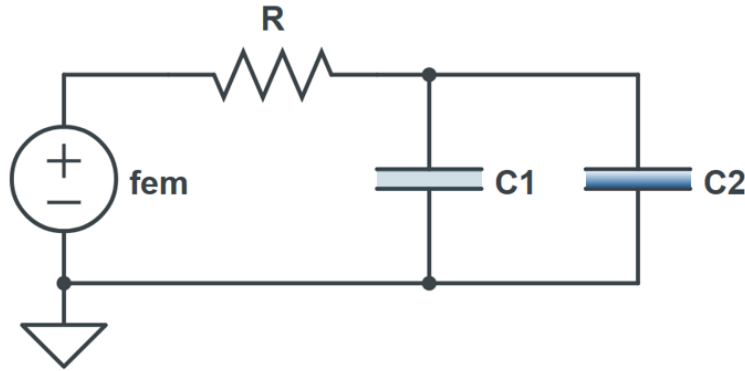
Tre armature piane conduttrici, di area $\Sigma = 0.25 \text{ m}^2$ e spessore finito, sono disposte rispettivamente nei piani di equazione $x_1 = 1.5 \text{ cm}$, $x_2 = 3.0 \text{ cm}$, $x_3 = 4.5 \text{ cm}$. L'armatura centrale è collegata a terra, mentre le armature 1 e 3 sono isolate, con densità di carica $\sigma_1 = 5 \mu\text{C}/\text{m}^2$ e $\sigma_3 = -2 \mu\text{C}/\text{m}^2$ rispettivamente. Tra le armature 1 e 2 e tra le armature 2 e 3 si trovano due dielettrici normali di costanti dielettriche relative $\kappa_1 = 3$ e $\kappa_2 = 2$ rispettivamente. Assumendo induzione completa tra le armature 1 e 2 e tra le armature 3 e 2, determinare:

- (a) il potenziale $V(x)$ in funzione della posizione x all'interno del sistema di armature, in particolare il valore di $V(x_3)$;
- (b) la densità di carica libera σ_{l2} presente sull'armatura 2;
- (c) le densità di carica di polarizzazione σ_{p1} e σ_{p2} sulle superfici dei due dielettrici affacciate all'armatura 2.

Le armature 1 e 3 vengono ora collegate elettricamente tra loro. In questa nuova configurazione determinare:

- (d) le densità di carica libera σ_{l1} e σ_{l3} ora presenti sulle armature 1 e 3 rispettivamente;
- (e) il lavoro W_e compiuto dalle forze esterne per estrarre il dielettrico tra le armature 1 e 2.

Problema 2.



Un generatore di tensione continua di valore $\mathcal{E} = 80 \text{ V}$ alimenta il circuito riportato in figura. Il resistore ha una resistenza $R = 10 \text{ k}\Omega$ e può dissipare una potenza massima $P_{max} = 2 \text{ W}$. I due condensatori sono ad armature piane e parallele. L'area di ciascuna armatura è $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$ e la distanza tra due armature è $h = 0.2 \text{ mm}$.

Il primo condensatore è riempito con un dielettrico lineare, omogeneo ed isotropo avente costante dielettrica relativa $\kappa_1 = 2$ e rigidità dielettrica $E_{1,max} = 1000 \text{ kV/m}$. Il secondo condensatore è riempito con un dielettrico lineare, isotropo ma non omogeneo avente costante dielettrica relativa $\kappa_2 = \frac{\kappa_0}{y+a}$, con $\kappa_0 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ e $a = 10^{-3} \text{ m}$, dove y rappresenta la distanza (in m) dalla armatura inferiore del condensatore. La rigidità dielettrica di tale materiale è uniforme e vale $E_{2,max} = 1000 \text{ kV/m}$.

Assumendo che al tempo $t = 0$ i condensatori siano scarichi, calcolare:

- (a) la tensione ai capi del condensatore 1 dopo un tempo $t_1 = 1.2 \mu\text{s}$.
- (b) il modulo del vettore polarizzazione $\mathbb{P}_1(t_1)$ nel dielettrico 1 al tempo t_1 .

Per rispondere alle successive domande si assuma che il processo ricominci da $t = 0$. Calcolare:

- (c) la tensione massima a cui può operare il generatore, $\mathcal{E}_{max}$ senza che i dielettrici nei condensatori inizino a scaricare.

Assumendo ora che il generatore eroghi la tensione $\mathcal{E}_{max}$ di cui al punto (c) spiegare se:

- (d) il resistore è in grado di operare a questa tensione? Motivare brevemente la risposta.

Soluzione del problema 1 (versione A)

Per la simmetria del problema, di ogni vettore $\vec{V}$ basterà considerare la proiezione V sull'asse x .

(a) Nel dielettrico 1 tra le armature 1 e 2 ($x_1 < x < x_2$):

$$E_1 = \frac{D_1}{\kappa_1 \epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\kappa_1 \epsilon_0} = 188 \text{ kV/m}$$

$$V_1(x) = V_1(x_2) - \int_{x_2}^x E_1 dx' = -\frac{\sigma_1}{\kappa_1 \epsilon_0}(x - x_2) = \frac{\sigma_1}{\kappa_1 \epsilon_0}(x_2 - x)$$

Analogamente, nel dielettrico 2 tra le armature 2 e 3 ($x_2 < x < x_3$):

$$E_2 = \frac{D_2}{\kappa_2 \epsilon_0} = -\frac{\sigma_3}{\kappa_2 \epsilon_0} = 113 \text{ kV/m}$$

$$V_2(x) = V_2(x_2) - \int_{x_2}^x E_2 dx' = \frac{\sigma_3}{\kappa_2 \epsilon_0}(x - x_2)$$

Dunque:

$$V_2(x_3) = \frac{\sigma_3}{\kappa_2 \epsilon_0}(x_3 - x_2) = -1.69 \text{ kV}$$

(b) Essendoci induzione completa tra armature della stessa area, o ricordando che $D_2 - D_1 = \sigma_{l2}$:

$$\sigma_{l2} = -(\sigma_1 + \sigma_3) = -3 \mu\text{C/m}^2$$

(c)

$$\sigma_{p1} = P_1 = \epsilon_0 (\kappa_1 - 1) E_1 = \frac{(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1} \sigma_1 = 3.33 \mu\text{C/m}^2$$

e, ricordando che la superficie del dielettrico 2 che affaccia sull'armatura 2 è orientata in verso opposto all'asse x :

$$\sigma_{p2} = -P_2 = -\epsilon_0 (\kappa_2 - 1) E_2 = \frac{(\kappa_2 - 1)}{\kappa_2} \sigma_3 = -1 \mu\text{C/m}^2$$

(d) Una volta connesse elettricamente le armature 1 e 3, il sistema diventa equivalente a due condensatori in parallelo. Le cariche libere sulle armature 1 e 3, σ_{l1} e σ_{l3} , si ridistribuiscono in modo da portare le due armature allo stesso potenziale $V_1(x_1) = V_2(x_3)$:

$$\sigma_{l1} + \sigma_{l3} = \sigma_1 + \sigma_3 \quad \frac{\sigma_{l1}}{\kappa_1 \epsilon_0}(x_2 - x_1) = \frac{\sigma_{l3}}{\kappa_2 \epsilon_0}(x_3 - x_2)$$

da cui, tenendo conto del fatto che $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$:

$$\sigma_{l1} = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 1.8 \mu\text{C/m}^2 \quad \sigma_{l3} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 1.2 \mu\text{C/m}^2$$

(e) Il lavoro delle forze esterne corrisponde alla variazione dell'energia potenziale elettrostatica totale del sistema: $W_e = U_{fi} - U_{in}$. La rimozione del dielettrico tra le armature 1 e 2 causa

un'ulteriore variazione della ripartizione della carica tra le armature 1 e 3. Dette $\tilde{\sigma}_{l1}$ e $\tilde{\sigma}_{l3}$ le densità di carica superficiale su queste ultime, analogamente al punto precedente avremo:

$$\tilde{\sigma}_{l1} + \tilde{\sigma}_{l3} = \sigma_1 + \sigma_3 \quad \frac{\tilde{\sigma}_{l1}}{\epsilon_0}(x_2 - x_1) = \frac{\tilde{\sigma}_{l3}}{\kappa_2 \epsilon_0}(x_3 - x_2)$$

dunque:

$$\tilde{\sigma}_{l1} = \frac{1}{1 + \kappa_2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 1 \mu\text{C} \quad \tilde{\sigma}_{l3} = \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 2 \mu\text{C}$$

L'energia potenziale elettrostatica prima e dopo la rimozione del dielettrico vale:

$$U_{in} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sigma_{l1}\Sigma)^2}{C_1} + \frac{(\sigma_{l3}\Sigma)^2}{C_2} \right] = 3.81 \times 10^{-4} \text{ J} \quad U_{fi} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\tilde{\sigma}_{l1}\Sigma)^2}{\tilde{C}_1} + \frac{(\tilde{\sigma}_{l3}\Sigma)^2}{C_2} \right] = 6.35 \times 10^{-4} \text{ J}$$

con C_1 e $\tilde{C}_1$ le capacità del condensatore 1-2 con e senza dielettrico e C_2 la capacità del condensatore 2-3:

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \epsilon_0 \Sigma}{x_2 - x_1} = 443 \text{ pF} \quad \tilde{C}_1 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{x_2 - x_1} = 148 \text{ pF} \quad C_2 = \frac{\kappa_2 \epsilon_0 \Sigma}{x_3 - x_2} = 2.95 \text{ pF}$$

Il lavoro delle forze esterne è dunque:

$$W_e = U_{fi} - U_{in} = 2.54 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Alternativamente, si potevano calcolare la carica Q del sistema dei due condensatori in parallelo, le capacità equivalenti $C_{eq} = C_1 + C_2$, $\tilde{C}_{eq} = \tilde{C}_1 + C_2$, e poi $W_e = U_{fi} - U_{in} = (1/2) Q^2 (1/\tilde{C}_{eq} - 1/C_{eq})$.

Soluzione del problema 2 (versione A)

Il sistema è un circuito RC serie in fase di carica. La capacità equivalente dei due condensatori è $C = C_1 + C_2$. Il calcolo di C_1 è immediato:

$$C_1 = \epsilon_0 \kappa_1 \frac{\Sigma}{h} = 8.85 \times 10^{-11} \text{ F}$$

Il dielettrico nel condensatore 2 è lineare e isotropo, la geometria del sistema garantisce che i campi $\vec{E}$, $\vec{\mathbb{P}}$, $\vec{D}$ siano ortogonali alle armature. Per calcolare la capacità C_2 si calcola dapprima il campo elettrico all'interno del secondo condensatore. Per fare questo si può considerare un cilindro di Gauss di superficie di base S e altezza y , la base inferiore sia parallela all'armatura inferiore e all'interno di essa, mentre la seconda base si trova (per $y < a$) all'interno del dielettrico. Applicando il teorema di Gauss per il campo $\vec{D}$ a questo cilindro e denotando con σ_ℓ il modulo della carica libera sull'armatura inferiore si ottiene

$$\Phi_{cil}(\vec{D}) = \Phi_{base-sup}(\vec{D}) = S \cdot D = \sigma_\ell S \quad \Rightarrow \quad D = \sigma_\ell$$

Il dielettrico è lineare e isotropo, vale quindi

$$\vec{\mathbb{P}} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$$

che, con la $\vec{D} = \vec{\mathbb{P}} + \epsilon_0\vec{E}$ porta a

$$\vec{D} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \kappa}$$

Inserendo la dipendenza di κ della coordinata y il campo nel condensatore 2 risulta

$$E_2 = \frac{\sigma_\ell}{\epsilon_0 \kappa_2} = \frac{\sigma_\ell}{\epsilon_0} \cdot \frac{y+a}{\kappa_0} = \frac{Q_2}{\epsilon_0 \Sigma} \cdot \frac{y+a}{\kappa_0}$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore C_2 è:

$$\Delta V_2 = \int_0^h E dy = \frac{Q_2}{\epsilon_0 \kappa_0 \Sigma} \int_0^h (y+a) dy = Q_2 \cdot \frac{h(h+2a)}{2\epsilon_0 \kappa_0 \Sigma}$$

Da cui

$$C_2 = \frac{2\epsilon_0 \kappa_0 \Sigma}{h(h+2a)} = 1.21 \times 10^{-10} \text{ F}$$

All'istante $t = 0$ inizia il processo di carica dei condensatori, la tensione ai loro capi segue la legge

$$V(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$$

con $\tau = R(C_1 + C_2) = 2.09 \times 10^{-6} \text{ s}$. Al tempo t_1 vale

$$V(t_1) = 34.9 \text{ V}$$

(b) La polarizzazione nello stesso istante vale

$$\mathbb{P}_1 = \epsilon_0(\kappa_1 - 1)E_1 = \epsilon_0(\kappa_1 - 1)\frac{V(t_1)}{h} = 1.55 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

(c) Si raggiunge la tensione di rottura di un dielettrico quando il campo elettrico al suo interno è pari alla rigidità elettrica. Per il condensatore 1 vale

$$\Delta V_{1,max} = E_{1,max}h = 200 \text{ V}$$

Per il condensatore 2 il campo è più elevato in $y = h$ dove vale.

$$E_2(h) = \frac{Q_2}{\epsilon_0 \Sigma} \cdot \frac{h+a}{\kappa_0} = \frac{2(h+a)}{h(h+2a)} \Delta V_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta V_2 = E_2(h) \frac{h(h+2a)}{2(h+a)}$$

Da cui

$$\Delta V_{2,max} = E_{2,max} \frac{h(h+2a)}{2(h+a)} = 183 \text{ V}$$

Essendo $\Delta V_2 = \mathcal{E}$ per $t \gg \tau$ la tensione massima a cui può operare il generatore senza perforare i dielettrici è $\mathcal{E}_{max} = 183 \text{ V}$

(d) La potenza dissipata dalla resistenza è

$$P_R(t) = RI^2(t)$$

con

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

che è massima all'istante $t = 0$. Con un generatore di tensione pari a $\mathcal{E}_{max} = 183 \text{ V}$ la potenza dissipata sulla resistenza dovrebbe essere

$$P_R = \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{R} = 3.36 \text{ W} > 2 \text{ W}$$

La resistenza non può funzionare a tale tensione.