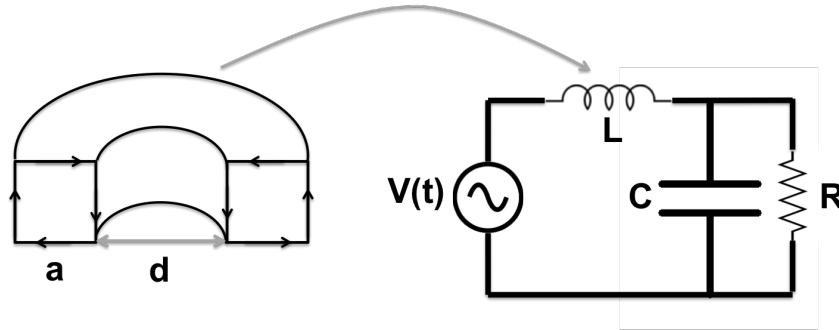


Fisica Generale 2: Prova parziale del 19/01/2024

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



Un avvolgimento di N spire equispaziate compone un solenoide toroidale di sezione quadrata con lato $a = 9.5 \text{ mm}$ e diametro interno $d = 1.9 \text{ cm}$. Il coefficiente di autoinduzione di tale solenoide è $L = 8.23 \times 10^{-5} \text{ H}$.

(a) Calcolare il numero di spire N che compongono il solenoide toroidale.

L'avvolgimento viene utilizzato come induttanza in un circuito alimentato da un generatore di tensione alternata $V(t) = V_0 \cos \omega t$, con $V_0 = 12 \text{ V}$ e $\omega = 2200 \text{ rad/s}$. Il circuito è composto dalla serie dell'induttanza L con il parallelo di una resistenza $R = 470 \Omega$ e una capacità $C = 54 \text{ nF}$.

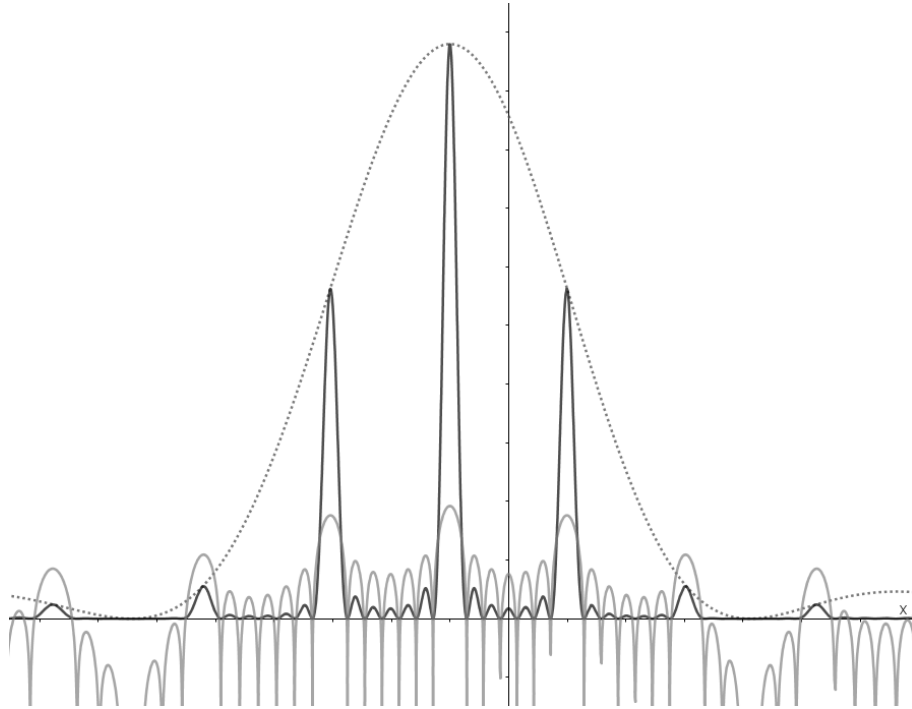
(b) Calcolare l'impedenza complessa $Z(\omega) = \text{Re } Z + i \text{ Im } Z$ del circuito, specificandone separatamente la parte reale $\text{Re } Z$ e la parte immaginaria $\text{Im } Z$.

Si introduce ora nel solenoide toroidale, riempiendolo completamente, un nucleo di materiale ferromagnetico con permeabilità magnetica relativa κ_m . Calcolare, sapendo che in questo contesto vale la relazione $\vec{B} = \mu_0 \kappa_m \vec{H}$, con κ_m indipendente dal valore del campo:

(c) il valore di κ_m per cui il circuito si trova in regime di risonanza;

(d) per il valore di κ_m determinato al punto precedente, il modulo M della magnetizzazione del materiale ferromagnetico, al centro della sezione quadrata del toroide e nell'istante in cui nell'avvolgimento scorre la massima corrente I_{max} .

Problema 2.



Un'onda piana monocromatica incide su un reticolo di diffrazione di passo d , formato da N fenditure ciascuna di larghezza a . L'intensità che si osserva in uno schermo posto a distanza $L = 3\text{ m} \gg Nd$ dal reticolo è rappresentata nella figura (grafico in nero, il grafico in grigio rappresenta la stessa grandezza in scala logaritmica). Da una attenta analisi della figura, inclusi i dettagli ben visibili solo in scala logaritmica, si possono ricavare informazioni sul numero di fenditure e sul rapporto d/a . L'origine degli assi corrisponde a $\theta = 0$ ovvero, equivalentemente, a $x = 0$ (propagazione in direzione ortogonale al piano del reticolo).

(a) Ricavare N e il rapporto d/a , giustificando sinteticamente il risultato.

La figura non è centrata a $\theta = 0$, infatti $\theta = 0$ corrisponde al terzo massimo secondario. Questo è dovuto al fatto che l'onda piana non incide ortogonalmente sul reticolo e quindi le sorgenti virtuali corrispondenti alle fenditure sono coerenti ma non sincrone, con sorgenti contigue che differiscono di una fase costante $\delta_0 = \phi_0^{(n-1)} - \phi_0^{(n)}$.

(b) Calcolare δ_0 .

È evidente dalla figura come i massimi principali non abbiano tutti la stessa intensità.

(c) Calcolare il rapporto $I_{max,1}/I_{max,0}$ tra l'intensità del primo massimo principale laterale e quella del massimo principale centrale.

(d) Calcolare la larghezza Δx , misurata sullo schermo, del massimo principale (definita come la distanza tra il massimo principale ed il minimo ad esso adiacente) se $\lambda/d = 1/5$.

(e) Sempre per $\lambda/d = 1/5$, calcolare l'angolo di incidenza θ_i dell'onda piana sul reticolo.

Soluzione del problema 1

(a) Il campo magnetico nel solenoide toroidale ($d/2 < r < d/2 + a$) si ricava dalla legge di Ampère, sfruttando le simmetrie del problema:

$$\oint_{\Gamma(r)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_c \quad \Rightarrow \quad B 2\pi r = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

L'autoflusso è allora

$$\Phi = N \int_{d/2}^{d/2+a} dr B a = \frac{\mu_0 a N^2 I}{2\pi} \int_{d/2}^{d/2+a} \frac{dr}{r} = I \frac{\mu_0 a N^2}{2\pi} \log \frac{d/2 + a}{d/2} = I \frac{\mu_0 a N^2}{2\pi} \log \left(1 + \frac{2a}{d} \right)$$

da cui

$$L = \frac{\mu_0 a N^2}{2\pi} \log \left(1 + \frac{2a}{d} \right)$$

Esplicitando per N risulta $N = 250$

(b) Definita l'impedenza complessa Z_i di un elemento del circuito tramite la relazione $\hat{V}_i = Z_i \hat{I}_i$, dove $\hat{V}_i$ e $\hat{I}_i$ sono quantità complesse le cui parti reali sono rispettivamente la tensione V_i ai capi dell'elemento e l'intensità di corrente I_i nell'elemento, sappiamo che

$$Z_R = R \quad Z_L = i\omega L \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Sappiamo inoltre che per due impedenze Z_1 e Z_2 poste in serie o in parallelo l'impedenza efficace è data da:

$$Z_{ser} = Z_1 + Z_2 \quad Z_{par} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1}$$

Allora

$$Z = Z_L + \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} \right)^{-1} = i\omega L + \left(i\omega C + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R + i\omega[L(1 + \omega^2 R^2 C^2) - R^2 C]}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

da cui, utilizzando il valore di L calcolato in precedenza:

$$\operatorname{Re} Z = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = 469 \Omega \quad \operatorname{Im} Z = \omega \left(L - \frac{R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) = -26.0 \Omega$$

(c) A parità di corrente che circola nell'avvolgimento, in presenza del materiale ferromagnetico il campo magnetico $\vec{B}$ all'interno del solenoide viene moltiplicato per un fattore κ_m , e lo stesso succede per l'autoflusso $\Phi_m = \kappa_m \Phi$ e per l'induttanza $L_m = \kappa_m L$. Pertanto si avrà risonanza per il valore di κ_m tale che $\operatorname{Im} Z = 0$, ovvero

$$\kappa_m = \frac{1}{L} \frac{R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{2\pi}{\mu_0 a N^2 \log(1 + 2a/d)} \frac{R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = 144$$

(d) La corrente massima I_{max} che scorre nell'avvolgimento in regime di risonanza è data da

$$I_{max} = \frac{V_0}{|\operatorname{Re} Z|} = \frac{V_0 (1 + \omega^2 R^2 C^2)}{R} = 2.56 \times 10^{-2} \text{ A}$$

Il calcolo di H nel solenoide riempito di materiale ferromagnetico procede allo stesso modo di quello di B e nel centro della sezione quadrata [$r = (d + a)/2$] fornisce:

$$H = \frac{N I_{max}}{2\pi r} = \frac{N I_{max}}{\pi(d + a)} = \frac{N V_0 (1 + \omega^2 R^2 C^2)}{\pi (d + a) R} = 71.5 \text{ A/m}$$

Noto H , è poi immediato calcolare M nelle ipotesi fatte:

$$M = (\kappa_m - 1) H = \left(\frac{2\pi}{\mu_0 a N^2 \log(1 + 2a/d)} \frac{R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - 1 \right) \frac{N V_0 (1 + \omega^2 R^2 C^2)}{\pi (d + a) R}$$

$$\simeq \frac{2 V_0 R C}{\mu_0 a N (d + a) \log(1 + 2a/d)} = 1.03 \times 10^4 \text{ A/m}$$

Soluzione del problema 2

(a) Nella figura, tra due massimi principali si osservano sei minimi e cinque massimi secondari. Essendo rispettivamente $(N-1)$ e $(N-2)$ il numero dei minimi e dei massimi secondari compresi tra due massimi principali, si deduce che $N = 7$.

La figura, in particolare quella in scala logaritmica, mostra come il terzo massimo secondario che si trova a metà tra i massimi principali di ordine 2 e 3 sia assente, in quanto coincidente con il primo minimo di diffrazione. La posizione del primo minimo di diffrazione è data da $\sin \theta = \lambda/a$. Le posizioni dei massimi principali di interferenza sono date da $\sin \theta = m \lambda/d$, quelle dei massimi secondari da $\sin \theta = (2\tilde{m} + 1)/(2N) \lambda/d$. Il massimo secondario in questione si trova quindi per $m = 5/2$ o, equivalentemente, per $\tilde{m} = 17$ ($N = 7$). Dunque

$$\frac{5}{2} \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{a} = \frac{5}{2} = 2.5$$

(b) La differenza di fase tra sorgenti (virtuali) successive è data da

$$\delta = k d \sin \theta + \delta_0$$

In questo caso la coordinata $x = 0$ sullo schermo, corrispondente a $\theta = 0$, cade nel punto di mezzo tra due massimi principali, quello per $m = 0$ (sorgenti in fase) e quello per $m = 1$ (sorgenti sfasate di 2π). Lo sfasamento tra sorgenti è quindi $\delta = \pi$. Quindi

$$\delta(\theta = 0) = k d \sin 0 + \delta_0 = \delta_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = \pi$$

(c) Le intensità dei massimi principali di interferenza sono modulate dalla figura di diffrazione, che ha andamento (con angolo θ' riferito al centro di simmetria della figura di intensità):

$$I(\theta') = I_{max} \left[\frac{\sin \left(\frac{k a}{2} \sin \theta' \right)}{\frac{k a}{2} \sin \theta'} \right]^2 = I_{max} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta' \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta'} \right]^2$$

Il massimo principale di interferenza di ordine uno si trova a $\sin \theta' = \lambda/d$. Quindi:

$$\frac{I_{max,1}}{I_{max,0}} = \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{d} \right)}{\frac{\pi a}{d}} \right]^2 = 0.573$$

(d) La distanza angolare tra un massimo principale di interferenza ed il minimo adiacente è

$$\begin{aligned} \Delta(\sin \theta) &= \frac{\lambda}{N d} = \frac{1}{7 \cdot 5} = \frac{1}{35} = 0.0286 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta \simeq \theta \simeq \tan \theta = \frac{x}{L} \\ \Rightarrow \quad \Delta x &= L \Delta(\sin \theta) = \frac{L \lambda}{N d} = 8.58 \text{ cm} \end{aligned}$$

(e) La differenza di fase tra due fenditure contigue è dovuta alla differenza di cammino ottico per un dato fronte d'onda, $r = d \sin \theta_i$, che porta ad una differenza di fase

$$\delta_0 = k d \sin \theta_i = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_i \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_i = \frac{\delta_0 \lambda}{2\pi d} = \frac{\lambda}{2 d} = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \theta_i = 0.1 \text{ (rad)}$$