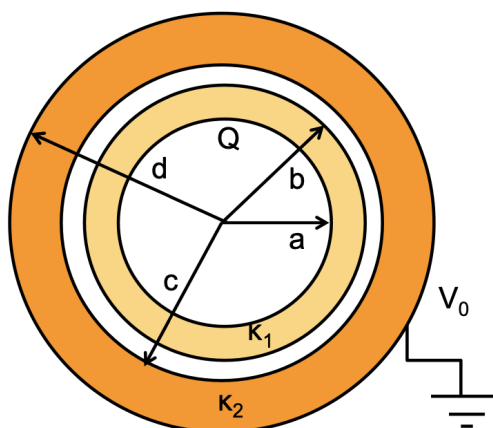


Fisica Generale 2: Primo appello - Prova del 24/01/2024

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

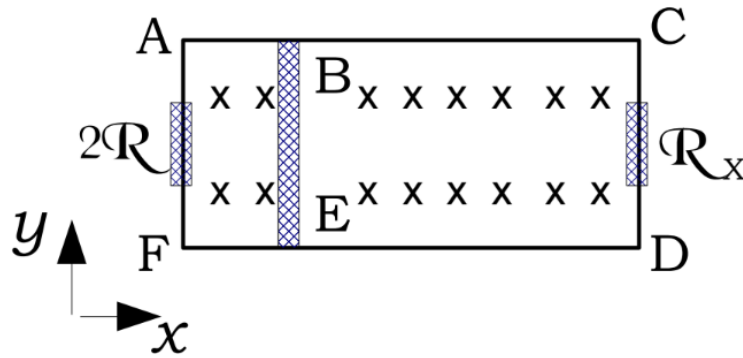
Problema 1.



Un condensatore ha come armature due gusci sferici metallici concentrici molto sottili di raggi $a = 3.5$ cm e $d = 4$ cm. La regione $a \leq r \leq b$, con $b = 3.7$ cm, è riempita con un dielettrico normale di costante dielettrica relativa $\kappa_1 = 4$; nella regione $b \leq r \leq c$ con $c = 3.8$ cm, c'è il vuoto; la regione $c \leq r \leq d$ è riempita con un dielettrico normale di costante dielettrica relativa $\kappa_2 = 7$. Sull'armatura interna è depositata una carica libera $Q = 2 \times 10^{-7}$ C, l'armatura esterna è messa a terra ($V_0 = 0$). Determinare:

- (a) l'espressione analitica della componente radiale $E(r)$ del campo elettrico $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, con $\vec{u}_r$ versore radiale rivolto verso l'esterno, nelle tre regioni, $a < r < b$, $b < r < c$, $c < r < d$, ed i suoi valori numerici in $r_1 = 3.6$ cm e $r_2 = 3.9$ cm;
- (b) la densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico, $\sigma_p(r)$, in $r = a$, $r = b$, $r = c$, $r = d$;
- (c) il potenziale V sull'armatura interna e la capacità C del condensatore.

Problema 2.

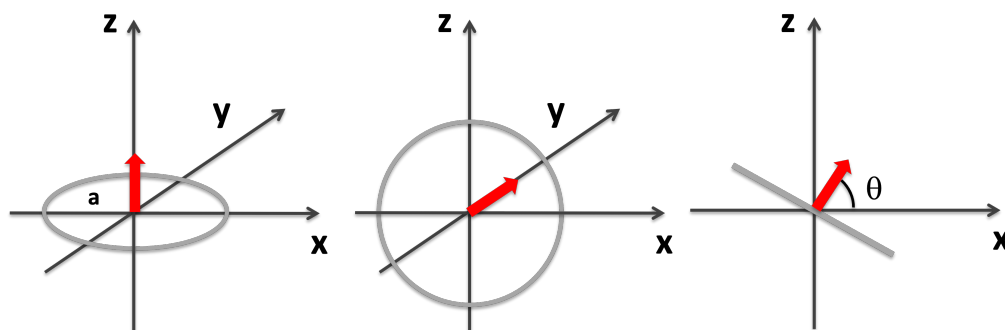


La sbarra conduttrice BE, di lunghezza $\ell=15\text{cm}$, massa $m=0.25\text{ Kg}$ e resistenza $R = 10\Omega$, può scorrere senza attrito a contatto ohmico col resto del circuito, che è immerso in un campo magnetico $B=3\text{T}$ perpendicolare ed entrante rispetto al piano del foglio. La resistenza lungo AF e CD valgono $R_0 = 2R = 20\Omega$ e R_X rispettivamente. All'istante iniziale ($t=0$) la sbarra riceve un impulso lungo la direzione orizzontale (asse x) e si muove con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$. Si osserva che in quell'istante si sviluppa sul circuito ABEFA una forza elettromotrice $\varepsilon(0) = 4.2 \cdot 10^{-2}\text{ V}$ (dove il segno positivo è consistente con la scelta degli assi cartesiani), e che la corrente I_X nel tratto CD è metà di quella I_0 lungo AF ($I_0 = 2I_X$). Calcolare:

- la velocità iniziale $\mathbf{v}_0$;
- il valore della resistenza R_X ;
- la forza , $\mathbf{F}_{BE}(0)$ che agisce sulla sbarra BE a $t=0$;
- il modulo della velocità v_∞ che la sbarra raggiunge a regime, quando cioè sia trascorso un tempo molto lungo dall'inizio del moto;
- l'energia U_J complessivamente dissipata per effetto Joule nel processo.

Le grandezze vettoriali, indicate in grassetto, vanno espresse in modulo, direzione e verso consistentemente con la scelta degli assi coordinati indicati in figura

Problema 3.



Un'onda elettromagnetica piana si propaga nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento cartesiano nella cui origine è posta una spira circolare di raggio $a = 10$ cm, resistenza $R = 8 \Omega$ e induttanza trascurabile. Disponendo la spira con il versore normale di riferimento coincidente con quello dell'asse z , si misura nella spira una corrente sinusoidale $I(t) = I_0 \cos(2\pi \nu t)$, con $I_0 = 1.5$ A e $\nu = 10^8$ Hz. Non si osserva invece passaggio di corrente se si dispone la spira con il suo versore normale coincidente con quello dell'asse y .

- Calcolare il rapporto $r = a/\lambda$ tra il raggio della spira e la lunghezza d'onda λ della radiazione.
- Ricordando il risultato del punto precedente, scrivere l'espressione delle tre componenti (E_x, E_y, E_z) e (B_x, B_y, B_z) dei campi elettrico e magnetico dell'onda in funzione delle coordinate e del tempo, esprimendo le ampiezze, il numero d'onda k e la pulsazione ω in funzione di a , R , I_0 e ν , e valutare numericamente i valori massimi E_{max} e B_{max} di $|\vec{E}|$ e $|\vec{B}|$.
- Se al posto della spira si pone ora nell'origine un disco sottile, sempre di raggio a , di materiale perfettamente assorbente, con il versore normale formante un angolo $\theta = \pi/3$ con l'asse x , quanta energia ΔU si deposita sul disco in un intervallo di tempo $\Delta t = 2$ s?
- Che forza $\vec{F}$ deve esercitare (in modulo, direzione e verso) il supporto del disco per mantenere il centro del disco fissato nell'origine?

Soluzione del problema 1

(a) Utilizzando la legge di Gauss e la simmetria sferica:

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{Q}{4\pi \kappa_1 \epsilon_0 r^2} & (a < r < b) \\ E(r) &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} & (b < r < c) \\ E(r) &= \frac{Q}{4\pi \kappa_2 \epsilon_0 r^2} & (c < r < d) \end{aligned}$$

da cui

$$E(r_1) = \frac{Q}{4\pi \kappa_1 \epsilon_0 r_1^2} = 347 \text{ kV/m} \quad E(r_2) = \frac{Q}{4\pi \kappa_2 \epsilon_0 r_2^2} = 169 \text{ kV/m}$$

(b) Utilizzando le relazioni $\sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{P}$, $\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E}$ e prestando attenzione ai segni:

$$\begin{aligned} \sigma_p(a) &= \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{1 - \kappa_1}{\kappa_1} = -9.74 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 & \sigma_p(b) &= \frac{Q}{4\pi b^2} \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} = 8.72 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \\ \sigma_p(c) &= \frac{Q}{4\pi c^2} \frac{1 - \kappa_2}{\kappa_2} = -9.45 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 & \sigma_p(d) &= \frac{Q}{4\pi d^2} \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} = 8.53 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} V &= - \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{\kappa_1} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \frac{1}{\kappa_2} \right] = \\ &= \frac{Q[\kappa_1 a b (d - c) + \kappa_1 \kappa_2 a d (c - b) + \kappa_2 c d (b - a)]}{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 a b c d} = 2.31 \text{ kV} \\ C &= \frac{Q}{V} = \frac{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 a b c d}{\kappa_1 a b (d - c) + \kappa_1 \kappa_2 a d (c - b) + \kappa_2 c d (b - a)} = 86.5 \text{ pF} \end{aligned}$$

Alla domanda si può anche rispondere osservando che il sistema è equivalente a tre condensatori in serie, di capacità rispettive

$$C' = \frac{4\pi \epsilon_0 \kappa_1 a b}{b - a} = 288 \text{ pF} \quad C'' = \frac{4\pi \epsilon_0 b c}{c - b} = 156 \text{ pF} \quad C''' = \frac{4\pi \epsilon_0 \kappa_2 c d}{d - c} = 592 \text{ pF}$$

Il potenziale sull'armatura interna è allora $V = V' + V'' + V'''$, con $V' = Q/C' = 0.694 \text{ kV}$, $V'' = Q/C'' = 1.28 \text{ kV}$, $V''' = Q/C''' = 0.338 \text{ kV}$, e la capacità $C = [(1/C') + (1/C'') + (1/C''')]^{-1}$.

Soluzione del problema 2

- a Legge di Faraday: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$, quindi $v_0 = -\frac{\varepsilon(0)}{\ell B} = 0.093 \text{ m/s}$ (attenzione, il segno del campo magnetico è negativo !) $\mathbf{v}_0 = 0.093 \mathbf{u}_x \text{ m/s}$.
- b La forza elettromotrice sul circuito ACDFE è complessivamente nulla, quindi la caduta di tensione lungo il tratto AF è uguale a quella lungo CD. Pertanto abbiamo: $I_0 2R = I_X R_X$, ovvero $R_X = 2RI_0/I_X = 4R = 40\Omega$.
- c Applicando la legge di Ohm al circuito ABEFE, troviamo : $\varepsilon(0) = I_{BE}R + I_0 2R$, dove $I_{BE} = I_0 + I_X = 1.5I_0$. Si ha pertanto: $I_{BE} = \frac{3\varepsilon(0)}{7R} = 1.80 \text{ mA}$. La forza che agisce sulla sbarretta è quindi: $\mathbf{F}_{BE}(0) = -I_{BE}\ell B \mathbf{u}_x = -8.1 \times 10^{-4} \mathbf{u}_x \text{ N}$, dove il segno è consistente con l'azione frenante della forza.
- d si ottiene un moto smorzato esponenzialmente, per cui asintoticamente la velocità tende a zero $v_\infty = 0$.
- e l'energia dissipata per effetto Joule corrisponde all'energia cinetica posseduta inizialmente dalla sbarretta $U_j = \frac{1}{2}mv^2 = 1.1 \text{ mJ}$. È molto più laborioso ricavarne l'espressione usando la legge di Joule.

Soluzione del problema 3

(a)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\lambda} = \frac{a \nu}{c} = \frac{1}{30} = 0.0333 \quad (\omega = 2\pi \nu = 6.28 \times 10^8 \text{ (rad) s}^{-1})$$

(b) Poiché $a \ll \lambda$, ad ogni dato istante si può assumere che i valori dei campi dell'onda e.m. siano gli stessi su tutti i punti del cerchio racchiuso dalla spira. Poiché l'onda si propaga lungo l'asse x , $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \vec{u}_x$, $E_x = 0$ e $B_x = 0$. Parametizziamo $B_y = B_{0y} \sin(kx - \omega t + \varphi_y)$, $B_z = B_{0z} \sin(kx - \omega t + \varphi_z)$. Quando il versore normale della spira è lungo z oppure y :

$$RI(t) = RI_0 \cos(\omega t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{\partial B_z(\vec{0}, t)}{\partial t} \pi a^2 = \omega B_{0z} \cos(\omega t - \varphi_z) \pi a^2$$

$$0 = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{\partial B_y(\vec{0}, t)}{\partial t} \pi a^2 = \omega B_{0y} \cos(\omega t - \varphi_y) \pi a^2$$

$$\Rightarrow \quad B_{0y} = 0 \quad \varphi_z = 0 \quad B_{0z} = \frac{RI_0}{\pi a^2 \omega} \quad \Rightarrow \quad B_y = 0 \quad B_z = \frac{RI_0}{\pi a^2 \omega} \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad E_y = \frac{c RI_0}{\pi a^2 \omega} \sin(kx - \omega t) \quad E_z = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{max} = \frac{c RI_0}{\pi a^2 \omega} = 182 \text{ V/m} \quad B_{max} = \frac{RI_0}{\pi a^2 \omega} = 6.08 \times 10^{-7} \text{ T}$$

(c) La densità di flusso di energia dell'onda è data dal vettore di Poynting:

$$\vec{S}(x, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_{max}^2 \sin^2(kx - \omega t) \vec{u}_x \quad (S_{max} = \epsilon_0 c E_{max}^2 = 88.3 \text{ W/m}^2)$$

Pertanto, detto $\vec{u}_N$ il versore normale alla superficie del disco assorbente:

$$\Delta U = \int_0^{\Delta t} \pi a^2 \vec{S}(0, t) \cdot \vec{u}_N dt = \pi a^2 S_{max} \cos \theta \int_0^{\Delta t} (\sin \omega t)^2 dt \simeq \pi a^2 S_{max} \frac{\Delta t}{4} = 1.39 \text{ J}$$

essendo l'intervallo di tempo Δt molto più lungo del periodo di oscillazione dell'onda.

(d) Essendo la superficie completamente assorbente, la forza esercitata dal supporto per mantenere in posizione il disco è pari all'opposto della quantità di moto depositata dall'onda sul disco nell'unità di tempo. La densità di flusso di quantità di moto è $\vec{g}(x, t) = \vec{S}(x, t)/c^2 = (S_{max}/c^2) \sin^2(kx - \omega t) \vec{u}_x$. Allora, mediando sul tempo:

$$\vec{F} = -\left\langle \frac{d\vec{P}}{dt} \right\rangle = -\pi a^2 \cos \theta c \langle \vec{g}(0, t) \rangle = -\frac{\pi a^2 \cos \theta S_{max}}{2c} \vec{u}_x \equiv -F_0 \vec{u}_x$$

$$F_0 = \frac{\pi a^2 \cos \theta S_{max}}{2c} = -\frac{\epsilon_0 \pi a^2 \cos \theta E_{max}^2}{2} \vec{u}_x = 2.31 \times 10^{-9} \text{ N}$$