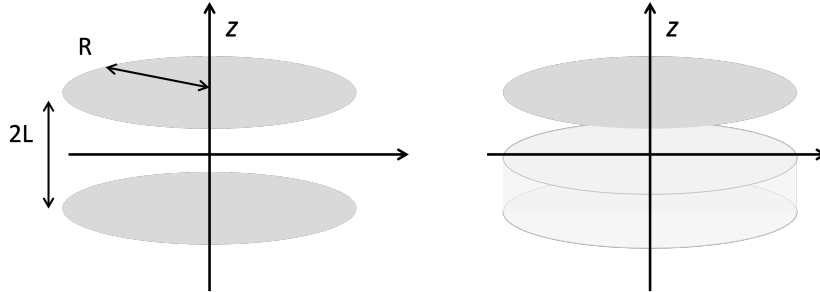


Fisica Generale 2: Prova scritta del 16/09/2024

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

$$(\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1})$$

Problema 1.



Due dischi di raggio $R = 5 \text{ cm}$ coassiali con asse parallelo a $\vec{z}$ hanno i centri in $(0, 0, -L)$ e $(0, 0, L)$ con $L = 0.75 \text{ cm}$. I due dischi sono carichi con densità di carica $\sigma_+ = 3.6 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$ (disco inferiore) e $\sigma_- = -\sigma_+$ (disco superiore). Si calcoli:

(a) il potenziale $V(z)$ generato dai due dischi sul loro asse ed in particolare il suo valore a $z = 0$;

(b) il campo elettrico $\vec{E}(z)$ sull'asse dei dischi nella regione tra essi compresa ed il suo valore a $z = 0$;

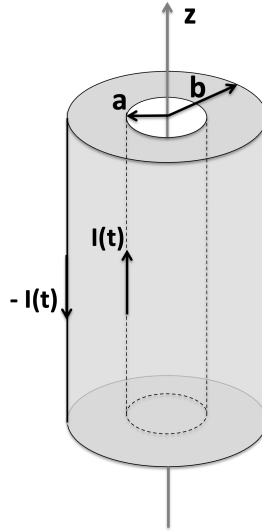
Si consideri un dipolo elettrico di momento $\vec{p} = (0, p \sin \theta, p \cos \theta)$ con $p = 7 \times 10^{-5} \text{ Cm}$ e $\theta = \pi/3$, posizionato nell'origine.

(c) Si calcoli l'energia elettrostatica U_p del dipolo ed il momento torcente $\vec{\tau}$ a cui è sottoposto.

Sul disco inferiore viene appoggiato un blocco di materiale dielettrico lineare con costante dielettrica relativa $\kappa = 1.5$. Le basi del blocco hanno la stessa dimensione dei dischi, mentre la sua altezza è pari a L .

(d) Nell'approssimazione di $R \gg L$ calcolare la densità di carica di polarizzazione σ_p sulla base superiore del blocco e il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ nella regione tra i due dischi.

Problema 2.



Un cavo coassiale è costituito da due cilindri conduttori coassiali di spessore trascurabile, di lunghezza indefinita e di raggi $a = 1 \text{ mm}$ e $b = 2 \text{ mm}$. Sui due cilindri scorrono parallele all'asse correnti lentamente variabili nel tempo $I(t) = I_0 \cos \omega t$ (cilindro interno) e $-I(t)$ (cilindro esterno), con $I_0 = 5 \text{ A}$ e $\omega = 2.5 \times 10^3 \text{ rad/s}$. Si considerino coordinate cilindriche con $\vec{z}$ coincidente con l'asse dei cilindri. Calcolare:

- (a) il campo magnetico $\vec{B}(r, t)$ nelle tre regioni, $r \leq a$, $a \leq r \leq b$ e $r > b$ ed il suo valore massimo B_{max} ad $r = 1.5 \text{ mm}$ (si trascuri il contributo della corrente di spostamento);
- (b) il campo elettrico $\vec{E}(r, t)$ nelle tre regioni, $r \leq a$, $a \leq r \leq b$ e $r > b$ ed il suo valore massimo E_{max} ad $r = a$, assumendo che E sia nullo all'infinito;
(Suggerimento: Si utilizzi la legge di Faraday-Lenz, considerando come circuito lungo il quale calcolare la circuitazione del campo elettrico un rettangolo giacente su un piano contenente l'asse z , con due lati paralleli all'asse (uno ad una coordinata generica r e l'altro ad $r = b$) e due ad esso ortogonale)
- (c) la corrente di spostamento $I_s(r, t)$ nella regione $r \leq a$ ed il suo valore massimo $I_{s,0}$, mostrando come essa sia trascurabile rispetto alla corrente di conduzione $I(t)$.
- (d) Si calcoli il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza L .

Problema 3.

Un fascio di luce monocromatico, di intensità $I_0 = 5 \text{ W/cm}^2$ e lunghezza d'onda $\lambda = 600 \text{ nm}$, incide perpendicolarmente su una sottile pellicola di materiale plastico trasparente. La lamina, avente indice di rifrazione $n_{lam} = 1.3$ e spessore $d = 2 \mu\text{m}$, è immersa in aria. Calcolare:

- (a) l'intensità del fascio trasmesso I_T ;
- (b) il più piccolo spessore d_{min} che deve avere la pellicola per ridurre al minimo l'intensità del fascio riflesso;
- (c) il valore di tale minimo I_{min} .

Supponiamo ora che la pellicola trasparente sia depositata su un obiettivo avente indice di rifrazione $n_{ob} = 1.54$. Calcolare

- (d) il più piccolo spessore d'_{min} che deve avere la pellicola per ridurre al minimo l'intensità del fascio riflesso in queste condizioni.

Soluzione del problema 1

(a) Il potenziale di un disco carico sul suo asse si può determinare ad esempio a partire dal potenziale generato da un anello di raggio r :

$$dV_{disco}(z) = \frac{dq(r)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{2\pi r\sigma dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + z^2}}$$

ed integrando tra 0 e R , ottenendo:

$$V_{disco}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right]$$

I contributi dei due dischi si ottengono traslando le loro coordinate di $\pm L$ e utilizzando i segni opportuni della densità di carica:

$$V(z) = V_+(z) + V_-(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (z + L)^2} - |z + L| \right] - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (z - L)^2} - |z - L| \right]$$

e quindi per la regione tra i due dischi ($|z| < L$ che implica $|z \pm L| = L \pm z$) si ha:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (z + L)^2} - \sqrt{R^2 + (z - L)^2} - 2z \right]$$

in particolare per $z = 0$ si ha:

$$V(0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + L^2} - \sqrt{R^2 + L^2} \right] = 0$$

(b) Per simmetria il campo elettrico lungo l'asse avrà E_z come unica componente non nulla; il suo valore si ottiene dunque differenziando lungo z il potenziale trovato al punto precedente (per $|z| < L$):

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z + L}{\sqrt{R^2 + (z + L)^2}} - \frac{z - L}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - 2 \right]$$

In particolare per $z = 0$ si ha:

$$E_z(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right] = 346.3 \text{ V/m}$$

(c) L'energia del dipolo vale

$$U_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE_z \cos \theta = -1.21 \times 10^{-2} \text{ J}$$

mentre per il momento torcente si ha:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = pE_z \sin \theta \vec{u}_x = 2.1 \times 10^{-2} \text{ Nm } \vec{u}_x$$

(d) Nell'approssimazione $R \gg L$, il campo tra i due dischi è costante, $E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Con l'inserimento del dielettrico, il campo spostamento elettrico è dovuto unicamente alle cariche libere $D_z = \sigma$ e dunque $E_z = \frac{D_z}{\epsilon_0 \kappa} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \kappa}$.

La densità di carica di polarizzazione è pari al modulo del campo di polarizzazione, a sua volta legato al valore del campo elettrico:

$$\sigma_p = |\vec{P}| = \epsilon_0(\kappa - 1)E_z = \sigma \frac{\kappa - 1}{\kappa} = 1.2 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

Sulla parte superiore del blocco si deposita la carica positiva.

Soluzione del problema 2

(a) Per simmetria la sola componente non nulla del campo magnetico è B_φ e (ad esempio considerando la circuitazione su circonferenze di raggio r) si ha:

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} 0; & r > b \\ \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}; & a < r < b \\ 0; & r < a \end{cases}$$

ed in particolare $B_\varphi(r = 1.5\text{mm}, t = n\pi) = B_{max} = 6.67 \times 10^{-4} \text{ T}$

(b) All'esterno del sistema il campo magnetico è nullo e dunque il campo elettrico è omogeneo nello spazio e siccome l'abbiamo assunto nullo all'infinito, sarà nullo per ogni $r > b$.

Consideriamo il circuito suggerito, indicando con h la lunghezza dei tratti paralleli all'asse. Per continuità il campo elettrico è nullo anche in $r = b$. Per questioni di simmetria sarà poi parallelo all'asse z , l'unico contributo alla circuitazione è dunque:

$$\oint_{\Gamma_r} \vec{E} \cdot d\vec{l} = hE_z(r, t)$$

che per Faraday-Lenz è pari alla variazione del flusso del campo magnetico attraverso la corrispondente superficie:

$$hE_z(r, t) = -\frac{d}{dt} h \int_r^b \frac{\mu_0 I_0 \cos \omega t}{2\pi r} dr = -h \frac{\omega \mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi} \log \frac{r}{b} \Rightarrow E_z(r, t) = -\omega \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi} \log \frac{r}{b}$$

e dunque per $r = a$, il valore massimo del campo è $E_{max} = -\omega \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \log \frac{a}{b} = 1.73 \times 10^{-3} \text{ V/m}$

In $r < a$, il campo magnetico è nullo e dunque anche in questo caso il campo elettrico sarà omogeneo nello spazio. Ancora per continuità si ha quindi che $E_z(r, t) = E_z(a, t) = -\omega \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi} \log \frac{a}{b}$

(c) La corrente di spostamento all'interno del primo cilindro è data da:

$$I_s(t) = \epsilon_0 \pi a^2 \frac{dE_z(a, t)}{dt} = a^2 \omega^2 \frac{I(t)}{2c^2} \log \frac{b}{a}$$

omogenea nello spazio. Il suo valore massimo è $I_{s,0} = \frac{I_0 a^2 \omega^2}{2c^2} \log \frac{b}{a} = 1.2 \times 10^{-16} \text{ A}$

È immediato vedere come la corrente di spostamento sia trascurabile rispetto alla corrente di conduzione:

$$\frac{I_s(t)}{I(t)} = \frac{a^2 \omega^2}{2c^2} \log \frac{b}{a} < 10^{-16}$$

(d) Consideriamo un circuito analogo a quello utilizzato nel punto (b), con $r = a$; per definizione di autoinduttanza abbiamo dunque:

$$-L_h \frac{dI}{dt} = \oint_{\Gamma_a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = hE_z(a, t) = h \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \log \frac{a}{b}$$

e dunque il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza è pari a:

$$L = \frac{L_h}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} = 1.39 \times 10^{-7} \text{ H}$$

Soluzione del problema 3

(a) La luce che incide sulla interfaccia di separazione aria-plastica viene in parte riflessa e in parte trasmessa, il coefficiente di riflessione di Fresnel è:

$$R = \frac{I_r}{I_0} = \left(-\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = 1.70 \times 10^{-2}$$

Il coefficiente di trasmissione è $T = 1 - R = 0.983$. La luce trasmessa, dopo aver attraversato la lamina, a sua volta viene parzialmente trasmesso all'esterno (attraverso l'interfaccia plastica-aria) e parzialmente riflessa nuovamente. Il processo di multiple riflessioni/trasmissioni procede in linea di principio all'infinito. Calcoliamo le intensità dei raggi che emergono dalla lamina. Il primo raggio riflesso ha intensità $I_{R1} = I_0 R$, i successivi raggi (emessi dallo stesso lato) hanno intensità $I_{R2} = I_0 T^2 R$, $I_{R3} = I_0 T^2 R^3$, $I_{R4} = I_0 T^2 R^5$, etc. Essendo $R \ll 1$ e $T \simeq 1$ si ha che $I_{R1} \simeq I_{R2}$ mentre tutti gli altri raggi hanno intensità molto inferiore e si possono trascurare.

Resta da considerare la differenza di fase δ_R tra i raggi $R1$ e $R2$. Il raggio $R1$ subisce un salto di fase $\Delta\phi_{R1} = \pi$ durante la riflessione sulla superficie della lamina, il raggio $R2$ attraversa due volte la lamina, ma non subisce salti di fase (la riflessione avviene da un mezzo più rifrattivo a uno meno rifrattivo), quindi $\Delta\phi_{R2} = 2knd$.

$$\delta_R = 2knd - \pi$$

I due raggi hanno una differenza di fase costante e quindi interferiscono, l'intensità del raggio risultante è pari a

$$I_R = I_{R1} + I_{R2} + 2\sqrt{I_{R1}I_{R2}} \cos \delta_R = I_0 R(1 + 2T \cos \delta_R + T^2) = 0.050 I_0 = 2.51 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

L'intensità trasmessa è quindi

$$I_T = I_0 - I_R = 4.75 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

Al medesimo risultato si poteva giungere calcolando le intensità dei raggi uscenti dalla seconda faccia della lamina. Esse sono $I_{T1} = I_0 T^2$, $I_{T2} = I_0 T^2 R^2$, $I_{T3} = I_0 T^2 R^4$, etc. Consideriamo anche in questo caso solo i primi due raggi. La differenza di fase tra di essi è

$$\delta_T = 3knd + 2\pi - knd \equiv 2knd \pmod{2\pi}$$

L'intensità trasmessa risulta essere

$$I_T = I_{T1} + I_{T2} + 2\sqrt{I_{T1}I_{T2}} \cos \delta_T = I_0 T^2(1 + 2R \cos \delta_T + R^2) = 0.950 I_0 = 4.75 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

Da notare che il valore calcolato non è formalmente identico a quello calcolato in precedenza, la differenza tra i due è dell'ordine del 3/10000.

(b) La relazione

$$I_R = I_0 R(1 + 2T \cos \delta_R + T^2)$$

indica come per $\cos \delta_R = -1$ si sia in condizioni di minimo, questo si ottiene per

$$\delta_R = 2knd - \pi = (2m - 1)\pi \quad \Rightarrow \quad d = m \frac{\lambda}{2n}; \quad d_{min} = \frac{\lambda}{2n} = 2.31 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(c) L'intensità di conseguenza è

$$I_{min} = I_0 R(1 - 2T + T^2) = I_0 R^3 = 0.246 \text{ W/m}^2$$

(d) In questo caso sulla seconda interfaccia (lamina-obiettivo) avviene ancora riflessione con salto di fase, per cui valgono ora $\Delta\phi'_{R1} = \pi$ e $\Delta\phi'_{R2} = 2knd + \pi$, quindi

$$\delta'_R = 2knd$$

I minimi di interferenza per I'_R si trovano per

$$\delta'_R = 2knd = (2m + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2m + 1}{4} \frac{\lambda}{n}; \quad d'_{min} = \frac{\lambda}{4n} = 1.15 \times 10^{-7} \text{ m}$$