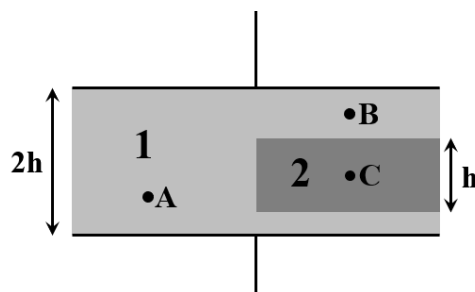


Fisica Generale 2: Prova scritta del 30/08/2024

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.
($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$)

Problema 1.



Un condensatore ad armature piane e parallele di area $S = 80 \text{ cm}^2$ e distanti $2h = 0.2 \text{ mm}$ è completamente riempito con due materiali dielettrici come indicato in figura. Il dielettrico 2 ha superficie di base $S/2$ e altezza h . I due dielettrici hanno costante dielettrica relativa $\kappa_1 = 4$ e $\kappa_2 = 2$. Le rispettive rigidità dielettriche* sono pari a $E_{R1} = 4 \times 10^7 \text{ V/m}$ e $E_{R2} = 1.5 \times 10^7 \text{ V/m}$. Si calcoli:

- (a) la capacità totale del sistema C_T ;
- (b) la capacità totale C_M quando il dielettrico 2 è sostituito con un metallo.

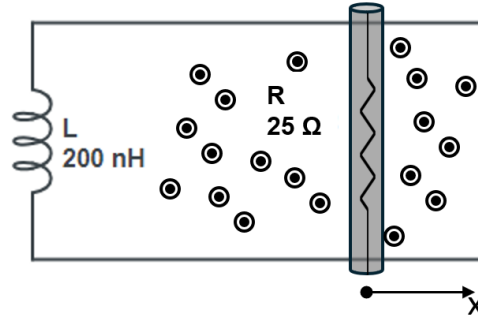
Si immagini di collegare il condensatore con i due dielettrici a un generatore di tensione continua di valore $V = 900 \text{ V}$. Si calcoli:

- (c) i valori dei campi elettrici all'interno del dielettrico 1, nei punti A e B (E_A e E_B) e all'interno del dielettrico 2 nel punto C (E_C);
- (d) la tensione massima V_{max} che si può applicare alle armature del condensatore evitando fenomeni di scarica.

(continua alla pagina seguente)

*La rigidità dielettrica è il massimo valore del campo elettrico che un dielettrico può sostenere senza essere danneggiato da scariche elettriche.

Problema 2.



Il circuito in figura consiste di due rotaie parallele di resistenza trascurabile poggiate su di un piano orizzontale, un tratto conduttore fisso collegato alle rotaie in cui è inserito un induttore di coefficiente $L = 0.2 \mu\text{H}$, e una sbarretta conduttrice di resistenza $R = 25 \Omega$, massa $m = 0.025 \text{ kg}$ e lunghezza $d = 0.75 \text{ m}$, libera di scorrere senza attrito in contatto ohmico con le rotaie. Il sistema è immerso in un campo magnetico verticale $\vec{B} = Bu_z$, $B = 1.5 \text{ T}$. Per $t < 0$ nel circuito non circola corrente e la sbarretta è in quiete. Per $t \geq 0$ è applicata sulla sbarretta una forza esterna costante $\vec{F} = Fu_x$, $F = 0,2 \text{ N}$.

(a) Calcolare l'accelerazione, a_0 , della sbarretta all'istante $t_0 = 0^+$;

Sia $t_1 \gg L/R$, calcolare:

(b) la corrente $I_1 = I(t_1)$;

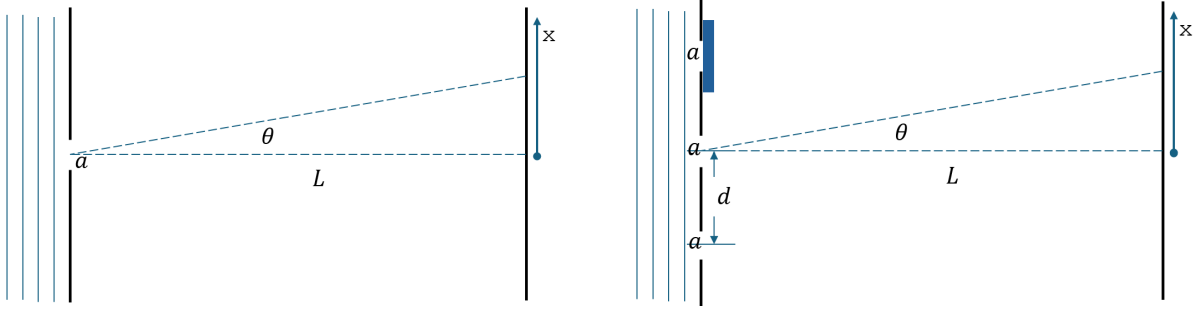
(c) la potenza, P_1 , erogata da F all'istante t_1 ;

Il sistema sia ora a regime con una forza esterna sia tale mantenere la sbarretta in moto a velocità $\bar{v}$ mentre nel circuito scorre una corrente costante $\bar{I} = 12 \text{ A}$. Il campo esterno $\vec{B}$ viene quindi spento.

(d) Stimare il tempo necessario, $\Delta \bar{t}$ (dall'istante di spegnimento di $\vec{B}$) perché la corrente che scorre nel circuito si riduca a $\bar{I}/10$.

(continua alla pagina seguente)

Problema 3.



Un'onda piana monocromatica ($\lambda = 8 \mu\text{m}$) polarizzata linearmente incide su uno schermo sul quale è presente una fenditura di larghezza $a = 40 \mu\text{m}$. Su un secondo schermo posto ad una distanza $L = 2.5 \text{ m}$ si vede una figura luminosa la cui intensità, $I(\theta)$, è massima in $\theta = 0$ dove vale $I(0) = 22 \text{ W/m}^2$. Sul secondo schermo sia fissato un sistema di riferimento x con origine in $\theta = 0$ (figura a sx).

(a) Calcolare la posizione sullo schermo, x_{1M} , e l'intensità, I_{1M} , del primo massimo laterale (per $x > 0$).

Si aprono ora sul primo schermo due fenditure identiche alla prima e poste simmetricamente (sopra e sotto) rispetto ad essa, a distanza $d \ll L$ dalla fenditura centrale (figura dx).

(b) Calcolare il modulo del campo elettrico massimo dell'onda incidente in $x = 0$, $E'(0)$.

(c) Sapendo che ora $I'(x_{1M}) = 0$, calcolare il più piccolo valore di d compatibile con questa informazione (spiegare brevemente).

Di fronte alla prima fenditura viene ora posta una lastra di quarzo di indice di rifrazione $n = 1.55$ e spessore $s = 14.8 \text{ mm}$. Il quarzo è un materiale otticamente attivo, il che significa che il piano di polarizzazione di un'onda che lo attraversa viene ruotato di un angolo

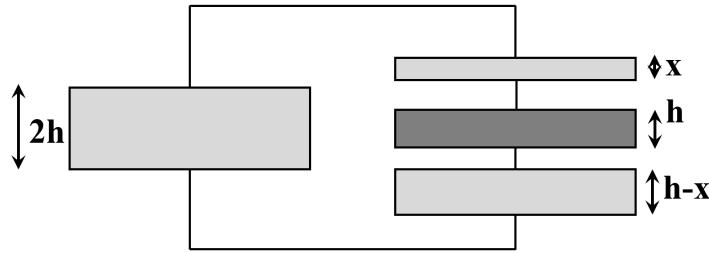
$$\gamma = C \cdot s$$

dove il coefficiente $C = 6.081 \text{ deg/mm}$ è la rotazione specifica del materiale (in questo caso in gradi per mm di spessore). Trascurando gli effetti delle riflessioni multiple:

(d) Calcolare l'intensità nel punto $x = 0$ in questa situazione, $I''(0)$.

Soluzione del problema 1

(a) La capacità totale del condensatore è quella equivalente al circuito sotto riportato ossia è il



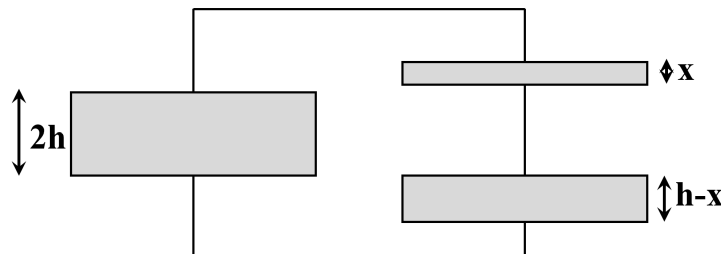
parallelo tra due condensatori, il secondo dei quali è la serie tra tre condensatori piani aventi la stessa area $S/2$, spessori x , $h-x$ (con dielettrico 1) e h (con dielettrico 2). L'inverso della capacità dei 3 condensatori in serie (a dx) risulta

$$\frac{1}{C_{dx}} = \frac{2}{\epsilon_0 S} \left(\frac{x}{\kappa_1} + \frac{h}{\kappa_2} + \frac{h-x}{\kappa_1} \right) = \frac{2h}{\epsilon_0 S} \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)$$

che è indipendente dal valore di x (che indica la distanza del dielettrico 2 dall'armatura). La capacità totale è

$$C_T = \frac{\epsilon_0 S}{2h} \left(\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) = 1.18 \times 10^{-9} \text{ F}$$

(b) La capacità totale del condensatore quando il dielettrico 2 è sostituito da un metallo è quella equivalente al circuito sotto riportato ossia è il parallelo tra due condensatori piani aventi la



stessa area $S/2$, lo stesso dielettrico ma spessori diversi:

$$C_M = \kappa_1 \frac{\epsilon_0 S}{2} \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h} \right) = \frac{3}{2} \kappa_1 \frac{\epsilon_0 S}{2h} = 2.12 \times 10^{-9} \text{ F}$$

(c) Il lato sinistro del condensatore è costituito da un dielettrico omogeneo, vale semplicemente

$$V = E_A \cdot 2h \quad \Rightarrow \quad E_A = \frac{V}{2h} = 4.5 \times 10^6 \text{ V/m}$$

Sul lato destro del condensatore conviene usare la continuità del vettore $\vec{D}$ e scrivere

$$D_B = \epsilon_0 \kappa_1 E_B = D_C = \epsilon_0 \kappa_2 E_C \quad \rightarrow \quad \kappa_1 E_B = \kappa_2 E_C$$

Vale inoltre:

$$V = E_B \cdot h + E_C \cdot h$$

Da cui si ricava che

$$E_B = \frac{V}{h} \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} = 3.0 \times 10^6 \text{ V/m} \quad , \quad E_C = \frac{V}{h} \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} = 6.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

(d) Esplicitando le precedenti relazioni rispetto a V e imponendo i valori massimi dei campi in A , B e C si ottiene:

$$V_{A,max} = E_{R1} \cdot 2h = 8.0 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_{B,max} = E_{R1} \cdot h \cdot \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} = 1.2 \times 10^4 \text{ V}$$

$$V_{C,max} = E_{R2} \cdot h \cdot \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1} = 2.25 \times 10^3 \text{ V}$$

La tensione massima che si può applicare è $V_{max} = 2.25 \times 10^3 \text{ V}$.

Soluzione del problema 2

Scegliamo come verso positivo di circolazione della corrente quello antiorario, in questo modo la normale positiva è parallela e concorde a $\vec{B}$. Due equazioni regolano il sistema, la prima la legge di Ohm generalizzata:

$$E_i + E_L = RI$$

con

$$E_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -Bvd \quad \text{e} \quad E_L = -L\frac{dI}{dt}$$

La seconda equazione lega la dinamica della sbarretta alla corrente che vi circola

$$ma = F + IBd$$

Il sistema si può quindi riscrivere

$$\begin{cases} -Bvd - L\frac{dI}{dt} = RI \\ \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} + \frac{Bd}{m}I \end{cases}$$

(a) La corrente e la velocità a $t = 0$ sono entrambe nulle e non possono avere discontinuità (questo comporterebbe: per la velocità che $mdv/dt \rightarrow \infty$, cioè la presenza di una forza impulsiva; per la corrente che $LdI/dt \rightarrow \infty$ cioè una f.e.m. autoindotta divergente). Dalla seconda equazione si deduce che:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} + \frac{Bd}{m}I \quad \rightarrow \quad a(0^+) = \frac{F}{m} + 0 = 8 \text{ m/s}^2$$

(b) Quando la sbarra ha raggiunto la velocità di regime si ha

$$0 = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} + \frac{Bd}{m}I \quad \rightarrow \quad I_1 = -\frac{F}{Bd} = -0.18 \text{ A}$$

La corrente è negativa come ci si aspetta poiché la forza magnetica sull'asta deve essere una forza frenante (la corrente sulla sbarretta deve quindi scorrere verso il "basso").

(c) La sbarra ha raggiunto la velocità di regime, e anche la corrente non cambia più, I_1 è la soluzione costante dell'equazione. In queste condizioni tutta la potenza erogata dalla forza esterna viene dissipata sulla resistenza

$$P_1 = RI_1^2 = 0.79 \text{ W}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere calcolando la velocità $v(t_1) = -\frac{RI_1}{Bd} = 3.95 \text{ m/s}$ e quindi la potenza meccanica come $P_1 = Fv_1$

(d) Il campo magnetico viene spento, la prima equazione del sistema diventa

$$0 - L\frac{dI}{dt} = RI \quad \rightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

con condizioni iniziali $I(0) = \bar{I}$. La soluzione di questa equazione è formalmente identica a quella di un circuito RC in scarica

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau}$$

con costante di tempo $\tau = L/R = 8 \times 10^{-9} \text{ s}$. Il tempo perché la corrente diminuisca di un fattore 10 è

$$\Delta \bar{t} = \tau \ln 10 = 1.84 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Soluzione del problema 3

(a) La fenditura produce una figura di diffrazione nello schermo lontano con una intensità modulata dalla funzione

$$I(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \right]^2 \quad \text{con} \quad \alpha = ka \sin \theta$$

I minimi di diffrazione si trovano per valori di $\alpha_{m,min} = 2\pi m$, $m \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. I massimi secondari di diffrazione sono approssimativamente nei punti di mezzo tra i minimi, quindi per $x > 0$ in:

$$\alpha_{m,max} = 2\pi \cdot \frac{2m+1}{2}, \quad m \in \{1, 2, \dots\}$$

Il primo massimo laterale si ha per

$$\alpha_{1,max} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_{1M} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{a} = 0.3$$

Sullo schermo il primo massimo secondario si trova quindi in

$$x_{1M} = L \cdot \tan(\theta_{1M}) = 0.786 \text{ m}$$

La sua intensità è pari a

$$I_{1M} = I(\alpha_{1,max}) = I_0 \left[\frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} \right]^2 = \frac{I_0}{[3\pi/2]^2} = 0.991 \text{ W/m}^2$$

(b) La posizione $x = 0$ corrisponde a $\theta = 0$ per tutte e 3 le sorgenti, di conseguenza le onde da esse provenienti giungono in fase sul secondo schermo.

$$E'(0) = 3E(0) = 3\sqrt{\frac{2I(0)}{\epsilon_0 c}} = 3 \cdot 128.73 \text{ V/m} = 386.2 \text{ V/m}$$

(c) L'intensità della figura è ora data da

$$I'(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \right]^2 \left[\frac{\sin(3\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2 \quad \text{con} \quad \alpha = ka \sin \theta, \delta = kd \sin \theta$$

Il fatto che $I'(\theta_{1M}) = 0$ implica che

$$\left[\frac{\sin(3\delta_{1M}/2)}{\sin(\delta_{1M}/2)} \right]^2 = 0$$

dove

$$\delta_{1M} = kd \sin \theta_{1M} = kd \cdot \frac{3\pi}{ka} = 3\pi \frac{d}{a}$$

Vale quindi

$$\sin(3\delta_{1M}/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\delta_{1M}/2 = m\pi \quad \Rightarrow \quad 3\delta_{1M}/2 = \frac{9\pi}{2} \cdot \frac{d}{a} = m\pi \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2a}{9}m$$

ma deve essere $d > a$, da cui

$$d = \frac{10a}{9} = 4.44 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(d) L'onda che attraversa la lastra di quarzo incontra due interfacce e quindi l'intensità dell'onda trasmessa è ridotta di un fattore

$$T^2 = (1 - R)^2 = \left[1 - \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 \right]^2 = 0.909$$

La lastra inoltre ruota il piano di polarizzazione di

$$\gamma = C \cdot s = 90.0 \text{ deg}$$

Questo comporta che in $x = 0$ le onde che giungono dalla sorgente 1 e dalle sorgenti 2 e 3 abbiano polarizzazioni ortogonali, di qui l'intensità risultante:

$$I''(0) = I_{23} + T^2 I_1 = 4I_1 + T^2 I_1 = 108 \text{ W/m}^2$$

Notiamo come lo sfasamento dell'onda 1 rispetto alle onde 2 e 3 (pari a $\Delta\phi = k(n-1)s = 2035\pi$) sia irrilevante.