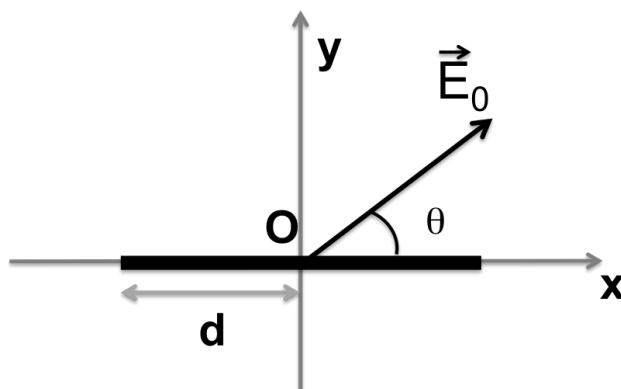


Fisica Generale 2: Prova parziale del 24/11/2023

Le risposte ai quesiti posti devono essere fornite sia in forma analitica, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione, che (quando possibile) in forma numerica, nelle unità del SI.

Problema 1.



Una sbarretta omogenea di sezione trascurabile e lunghezza $2d = 16$ cm ha il centro nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano, è allineata all'asse x ed è carica con una densità lineare non uniforme $\lambda(x) = ax$.

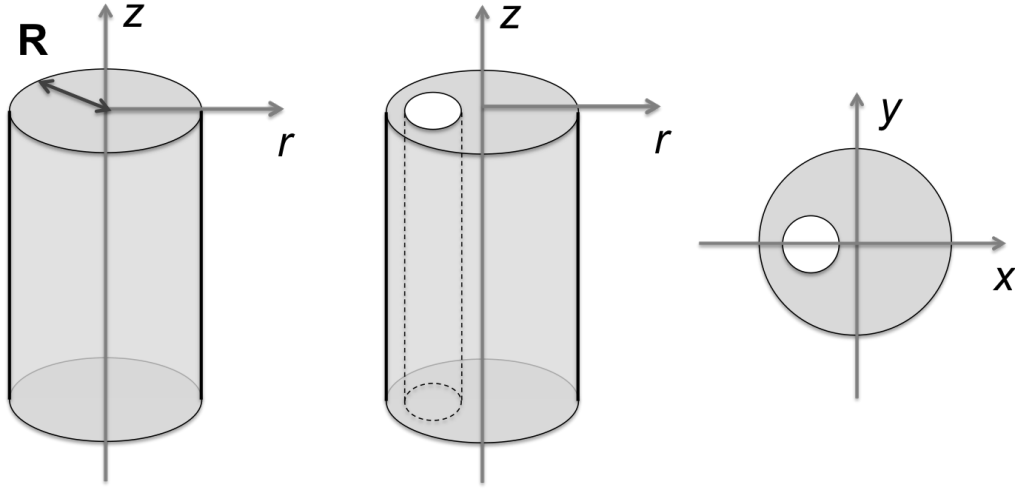
a) Sapendo che la sbarretta ha un momento di dipolo elettrico $\vec{p} = 4.10 \times 10^{-9} \text{ C m } \vec{u}_x$, calcolare a .

La sbarretta è immersa in un campo elettrico esterno uniforme e costante $\vec{E}_0$ parallelo al piano (xy) , di modulo $E_0 = 1200 \text{ V/m}$ e che forma un angolo orientato $\theta = \pi/6$ con l'asse x . Essa è libera di ruotare senza attrito attorno all'asse z . Determinare:

b) il lavoro meccanico esterno L_m necessario per ruotare la sbarretta fino alla posizione di equilibrio stabile;

c) il periodo T delle piccole oscillazioni della sbarretta attorno alla posizione di equilibrio, nel caso in cui il suo momento di inerzia rispetto all'asse z sia $I_z = 4.5 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2$.

Problema 2.



Un cilindro conduttore pieno, centrato sull'asse z , di raggio $R = 0.68$ cm e di lunghezza indefinita, è percorso da una densità di corrente uniforme $\vec{j}$. La corrente totale che fluisce attraverso il conduttore è $I = -268$ A (quindi con verso $-\vec{u}_z$). Gli elettroni di conduzione, di carica $q = -1.621 \times 10^{-19}$ C, hanno una velocità di deriva $\vec{v}_d$ ed il loro numero per unità di volume è $n = 4.3 \times 10^{29}/\text{m}^3$. Determinare:

- il valore della velocità di deriva, v_d degli elettroni;
- l'espressione analitica del vettore campo magnetico $\vec{B}(r)$ per tutti i possibili valori di $r \geq 0$, nonché il valore numerico del suo modulo $|\vec{B}(R)|$ per $r = R$, utilizzando coordinate cilindriche (r, θ, z) ed i versori associati $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$;

All'interno del cilindro viene ora praticata una cavità come in figura, anch'essa cilindrica e parallela all'asse z , di raggio $R_0 = R/4$. Utilizzando ora coordinate cartesiane (x, y, z) , l'asse delle cavità è parallelo all'asse z ed attraversa il piano $z = 0$ nel punto $(-R/2, 0, 0)$. Il resto del cilindro è percorso dalla medesima densità di corrente di cui sopra.

- In questa nuova situazione, determinare modulo, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}'_0$ sull'asse z e del campo magnetico $\vec{B}'_1$ sull'asse della cavità.
- Si ponga al centro della cavità una piccola spira di momento magnetico $\vec{m} = 3 \times 10^{-7} \text{ Am}^2 \vec{u}_z$. Determinare la forza che agisce sulla spira.

Soluzione del problema 1

(a) Il problema è ben posto perché la sbarretta ha carica totale nulla, $Q = \int_{-d/2}^{d/2} \lambda(x) dx = 0$. La formula valida per una distribuzione discreta di cariche puntiformi, $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$, si generalizza in modo ovvio ad una distribuzione continua. Calcolando per semplicità $\vec{p}$ rispetto all'origine O :

$$\vec{p} = \int dq \vec{r} = \int_{-d}^d dx \lambda(x) x \vec{u}_x = a \int_{-d}^d dx x^2 \vec{u}_x = a \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-d}^d \vec{u}_x = \frac{2ad^3}{3} \vec{u}_x$$

Da qui

$$a = 12 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

(b) Il lavoro meccanico esterno è pari alla variazione di energia potenziale, $L_m = U_f - U_i$, con $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$. Nella posizione di equilibrio $\vec{p}$ e $\vec{E}_0$ sono paralleli e concordi, dunque:

$$L_m = U_f - U_i = (-pE_0) - (-pE_0 \cos \theta) = -6.59 \times 10^{-7} \text{ J}$$

(c) Tenendo conto del fatto che, se θ è l'angolo orientato che $\vec{E}_0$ forma con $\vec{u}_x$, l'angolo orientato che descrive lo spostamento del dipolo dalla posizione di equilibrio stabile è $-\theta$, l'equazione del moto per le piccole oscillazioni ($\sin \theta \simeq \theta$) è:

$$\tau_z = -I_z \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{p E_0}{I_z} \theta$$

cui corrispondono rispettivamente frequenza angolare e periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{p E_0}{I_z}} = 3.30 \text{ (rad) s}^{-1} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{p E_0}} = 1.90 \text{ s}$$

Soluzione del problema 2

(a) Posto $\vec{j} = j_z \vec{u}_z$, considerando una sezione Σ del cilindro di versore normale $\vec{u}_z$ ed area $A = \pi R^2 = 1.54 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ avremo che:

$$j_z = v_d n q = \frac{I}{\pi R^2} = -1.84 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

da cui

$$\vec{v}_d = (2.65 \times 10^{-5} \text{ m/s}) \vec{u}_z$$

(b) Per la simmetria del problema, $\vec{B}(r) = B(r) \vec{u}_\theta$. Modulo e verso si ottengono applicando la legge di Ampère ad una circonferenza di raggio r orientata nel verso di $\vec{u}_\theta$:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_c$$

dove I_c è la corrente concatenata, $I_c = j_z \pi r^2$ per $r \leq R$ e $I_c = I$ per $r \geq R$. Avremo perciò:

$$(r \leq R) \quad B(r) = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_z r}{2} = \frac{\mu_0 v_d n q r}{2}$$

$$(r \geq R) \quad B(r) = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 v_d n q R^2}{2 r}$$

In particolare, ricordato che $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$: $|\vec{B}(R)| = 7.88 \times 10^{-3} \text{ T}$.

(c) Per il principio di sovrapposizione, il campo magnetico $\vec{B}'$ nella nuova situazione sarà la somma vettoriale del campo $\vec{B}$ del caso precedente e del campo $\vec{B}_c$ generato da una densità di corrente $\vec{j}_c = -\vec{j}$ che percorre la cavità: $\vec{B}' = \vec{B} + \vec{B}_c$. Sull'asse z è $\vec{B} = 0$, dunque:

$$\vec{B}'_0 = \vec{B}_c = -\frac{\mu_0 v_m n q R_0^2}{2 r_1} \vec{u}_y = -\frac{\mu_0 v_m n q R}{16} \vec{u}_y = +(9.86 \times 10^{-4} \text{ T}) \vec{u}_y$$

Sull'asse della cavità $\vec{B}_c = 0$, dunque:

$$\vec{B}'_1 = \vec{B} = -\frac{\mu_0 v_m n q r_1}{2} \vec{u}_y = -\frac{\mu_0 v_m n q R}{4} \vec{u}_y = +(3.94 \times 10^{-3} \text{ T}) \vec{u}_y$$

d) La forza agente sulla spira di momento è data da:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Se il momento magnetico è orientato lungo z , la forza diventa:

$$\vec{F} = \nabla(m B_z) = m \nabla B_z$$

perché m è assunto costante. In altre parole, la forza dipende solo dal gradiente della componente z del campo magnetico nella cavità. Trascurando gli effetti di bordo, il campo magnetico nella cavità, ma non solo, ha componenti solo sul piano perpendicolare all'asse z , ossia B_z è sempre uguale a zero. Ne deriva che la forza agente sulla spira è nulla.