

1. Una sfera isolante di raggio R_1 possiede una densità di carica volumetrica non uniforme, che varia con la distanza r dal centro secondo la legge

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)$$

(dove ρ_0 è una costante positiva. La sfera è concentrica ad un guscio conduttore sferico, inizialmente scarico, di raggio R_2 e raggio esterno R_3 (con $R_3 > R_2 > R_1$). Determinare:

- La carica totale Q_{tot} racchiusa nella sfera interna
- Il campo elettrico in tutto lo spazio
- Le densità di carica superficiali σ_{int} e σ_{est} indotte sulle superfici interna (R_2) e esterna (R_3) del guscio conduttore
- Il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio, ponendo $V(\infty) = 0$

a)
$$Q_{\text{tot}} = \int_0^{R_1} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int_0^{R_1} \left(1 - \frac{r}{R_1}\right) r^2 dr =$$

$$= 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R_1} \right]_0^{R_1} = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^3}{4} \right) = 4\pi \rho_0 \frac{R_1^3}{12} = \frac{\pi \rho_0 R_1^3}{3}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

b) $\rightarrow r < R_1$

$$Q_{\text{int}}(r) = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R_1} \right] = 4\pi \rho_0 r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R_1} \right)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R_1} \right)$$

$\rightarrow R_1 \leq r < R_2$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R_1^3}{12 \epsilon_0 r^2}$$

$\rightarrow R_2 \leq r < R_3$

$$E(r) = 0$$

$\rightarrow r > R_3$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R_1^3}{12 \epsilon_0 r^2}$$

c) $Q_{\text{int, superficie}} = -Q_{\text{tot}}$

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{-Q_{\text{tot}}}{4\pi R_2^2} = -\frac{\rho_0 R_1^3}{12 R_2^2}$$

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi R_3^2} = \frac{\rho_0 R_1^3}{12 R_3^2}$$

d) $V(\infty) = 0$

$\rightarrow r > R_3$

$$V(r) = \int_r^\infty E(r') dr' = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R_1^3}{12 \epsilon_0 r}$$

$\rightarrow R_2 \leq r < R_3$

$$V(r) = V(R_3) = \frac{\rho_0 R_1^3}{12 \epsilon_0 R_3}$$

$\rightarrow R_1 \leq r < R_2$

$$V(r) = V(R_2) + \int_r^{R_2} \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi \epsilon_0 (r')^2} dr' = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi \epsilon_0 R_3} + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= \frac{\rho_0 R_1^3}{12 \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

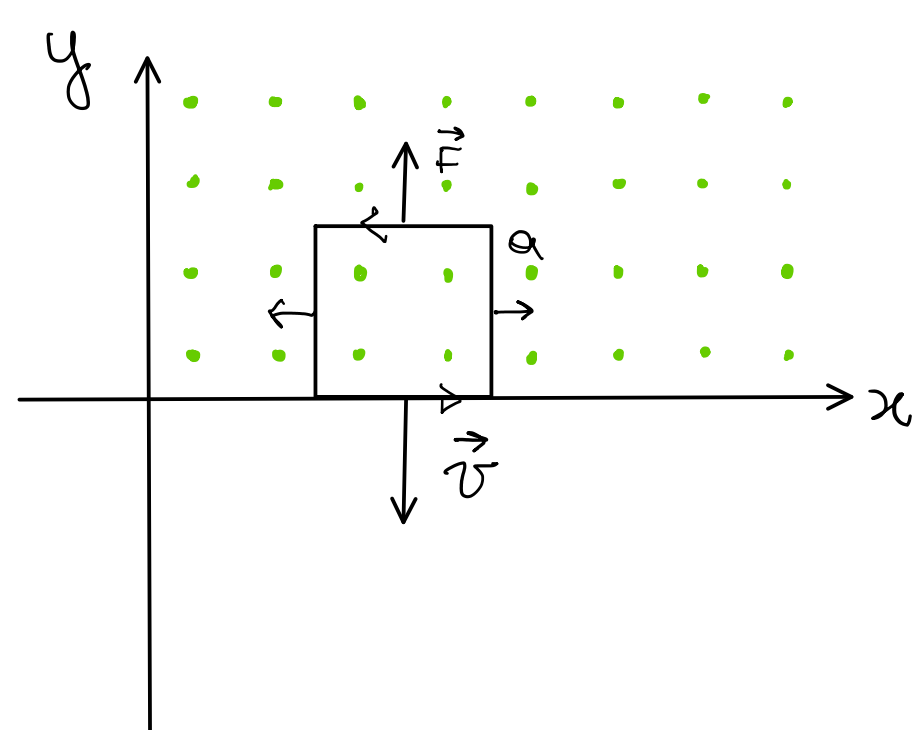
$\rightarrow r < R_1$

$$V(r) = V(R_1) + \int_r^{R_1} \frac{\rho_0 r'}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r'}{4R_1} \right) dr' =$$

$$= V(R_1) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{R_1^2 - r^2}{6} - \frac{R_1^3 - r^3}{12 R_1} \right]$$

2. Una spira quadrata di lato a , massa m e resistenza elettrica totale R si trova sul piano verticale xy . Nella regione $y > 0$ è presente un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, uscente dal foglio, di modulo B , mentre per $y < 0$ il campo è nullo. La spira viene lasciata cadere da ferma sotto l'effetto della gravità g , partendo da una posizione in cui il suo lato inferiore si trova esattamente a $y = 0$. Durante la prima fase del moto la spira sta uscendo dal campo magnetico. Determinare:

- Il flusso del campo magnetico $\Phi(\vec{B})$ attraverso la spira in funzione della coordinata y del lato superiore (finché la spira è parzialmente immersa)
- La forza elettromotrice indotta e il verso della corrente indotta
- La forza magnetica frenante che agisce sulla spira in funzione della sua velocità istantanea



$$|v| = -\frac{dy}{dt}$$

a) $S(y) = ay$ $S_{\text{exc}} = a(a-y)$

$$\Phi(B) = B S(y) = Bay$$

b) $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -Ba \frac{dy}{dt} = Ba v$

verso antiorario

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Ba v}{R}$$

c) $\vec{F}_M = I (\vec{a} \times \vec{B})$

$$F_M = I a B = \frac{B^2 a^2 v}{R} \quad \text{verso l'alto (frena)}$$

$$F_L = mg \frac{da}{dt} \times \vec{B}$$