

Lezione 8

- Un solenoide ideale lungo $l = 40$ cm ha una sezione trasversale circolare di raggio $r = 2$ cm ed è formato da $N = 800$ spire avvolte nel vuoto.

- Calcolare l'induttanza L del solenoide
- Se nel solenoide la corrente diminuisce uniformemente da 5 A a 0 A in un intervallo di tempo $\Delta t = 0.1$ s, qual è il valore della f.e.m. autoindotta?

Soluzioni

$$a) \quad A = \pi r^2 = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = 2.53 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \quad \Phi_B = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i A$$

$$L = \frac{\Phi_B}{i}$$

$$b) \quad \text{fem} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.127 \text{ V}$$

$$\text{fem} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

- Due bobine coassiali e vicine hanno un coefficiente di mutua induttanza $M = 15$ mH. Nella prima bobina viene fatta scorrere una corrente sinusoidale espressa da $i_1(t) = I_0 \sin(\omega t)$, dove $I_0 = 2$ A e la frequenza è $f = 50$ Hz.

- Scrivere l'espressione analitica della f.e.m. indotta nella seconda bobina in funzione del tempo
- Quale è il valore massimo di tale f.e.m.?

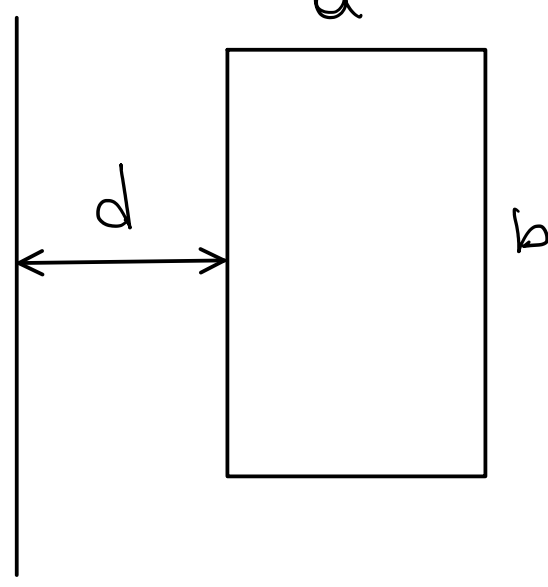
$$a) \quad \omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s} \quad (100\pi) \text{ rad/s}$$

$$\text{fem}_2 = -M \frac{di_1}{dt} = -M \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = -3\pi \cos(100\pi t) \text{ V}$$

$$b) \quad \text{fem}_{2, \max} = M I_0 \omega = 9.42 \text{ V}$$

- Un filo rettilineo indefinito e una spira rettangolare di lati $a = 5$ cm e $b = 20$ cm giacciono nello stesso piano. Il lato lungo b della spira è parallelo al filo e si trova a una distanza $d = 2$ cm da esso.

- Calcolare il coefficiente di mutua induttanza M del sistema
- Se nel filo scorre una corrente che varia nel tempo secondo la legge $I(t) = k \cdot t$, dove $k = 15$ A/s, determinare la f.e.m. indotta nella spira e specificarne il verso di percorrenza



Campo magnetico generato dal filo

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$dA = b \cdot dr$$

$$\Phi(B) = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right)$$

$$\Phi = M \cdot I \Rightarrow M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) = 5.01 \cdot 10^{-8} \text{ H}$$

$$\frac{dI}{dt} = k = 15 \text{ A/s}$$

$$|\text{fem}| = M \frac{dI}{dt} = 7.52 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

- Un cavo coassiale è formato da un conduttore cilindrico interno di raggio $R_1 = 1.5$ mm e da una guaina cilindrica esterna sottile di raggio $R_2 = 6$ mm. Nel cavo scorre una corrente di densità $I = 4$ A

- Determinare l'espressione della densità di di energia magnetica u_B nello spazio compreso tra i due conduttori ($r = 3.75$ mm)
- Calcolare l'energia magnetica totale per unità di lunghezza immagazzinata nel cavo.

Soluzione

$$a) \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 2.13 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = 0.018 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

b)

$$\frac{U}{\ell} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} dr \, r \frac{B^2}{2\mu_0} =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} dr \, r \frac{1}{r^2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 2.22 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{m}}$$

- Un filo conduttore cilindrico di raggio $R = 1$ mm, lunghezza $L = 2$ m e resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ è percorso da una corrente continua e costante $I = 5$ A.

- Determinare il vettore di Poynting sulla superficie esterna del filo
- Calcolare il flusso totale del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del filo e confrontarlo con la potenza dissipata per effetto Joule

$$a) \quad A = \pi R^2 = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$E = \rho \cdot j = \rho \frac{I}{A_{\text{sez}}} = 0.0271 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 10^{-3} \text{ T}$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} E B = 21.57 \text{ W/m}^2$$

$$b) \quad A_{\text{lat}} = 2\pi R L = 0.0126 \text{ m}^2$$

$$\Phi_{\text{entrante}}(S) = S \cdot A_{\text{lat}} = 0.272 \text{ W}$$

$$R_{\text{filo}} = \rho \frac{L}{A_{\text{sez}}} = 0.0108 \Omega$$

$$P = R I^2 = 0.270 \text{ W}$$

- Un trasmettitore emette onde elettromagnetiche in un cono che copre un angolo solido $\Delta\Omega = 2 \cdot 10^{-2}$ steradiani. A distanza $r_1 = 2$ km dal trasmettitore l'ampiezza massima del campo elettrico è $E_1 = 20$ V/m. Calcolare:

- L'ampiezza B_1 del campo magnetico
- La potenza $\mathcal{P}$ del trasmettitore
- Le ampiezze E_2 e B_2 alla distanza $r_2 = 10$ km

$$a) \quad B_1 = \frac{E_1}{c} = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

$$b) \quad I_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_1^2 = 0.53 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$A = \Delta\Omega \cdot r_1^2 = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^2$$

$$P = I_1 \cdot A_1 = 42440 \text{ W}$$

$$c) \quad I \propto \frac{1}{r^2} \quad I \propto E^2$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$E_2 = E_1 \frac{r_1}{r_2} = 4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$B_2 = \frac{E_2}{c} = 1.33 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

- In una regione di spazio vuoto, un'onda elettromagnetica piana e monocromatica si propaga lungo la direzione positiva dell'asse x . Il campo elettrico dell'onda è descritto dall'equazione $E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$, con $E_0 = 80$ V/m.

- Scrivere l'espressione analitica del vettore di Poynting istantaneo $S(x, t)$
- Calcolare l'energia che attraversa in un tempo $\Delta t = 1$ m una superficie piana di area $A = 0.5$ m² perpendicolare alla direzione di propagazione

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c \mu_0} \cos^2(kx - \omega t) \hat{i}$$

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = 8.50 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$U = I A \Delta t = 255 \text{ J}$$