

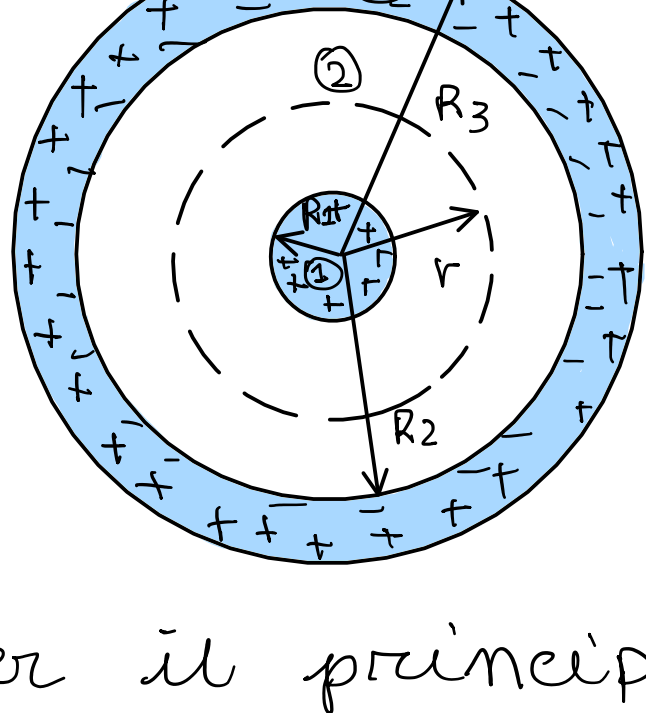
ESERCIZIO 1

Un conduttore sferico di raggio R_1 è al centro di un conduttore sferico cavo di raggio R_2 e esterno R_3 . Una carica $+q$ è depositata sul conduttore interno

a) Calcolare campo e potenziale elettrostatico in funzione di r distanza dal centro. Studiare i casi particolari in cui: b) si colleghino i due conduttori, oppure c) si ponga a potenziale elettrico zero quello esterno

Soluzione

a)



I Per induzione elettrostatica abbiamo:

- carica q su R_1
- carica $-q$ su R_2
- carica q su R_3

II Per il principio di sovrapposizione consideriamo i campi come generati da sfere cariche e poi li sommiamo

III All'interno di una sfera:

$$E=0$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

All'esterno di una sfera:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

IV	$V(r)$	$E(r)$
$\Rightarrow$ ① $0 \leq r \leq R_1$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$	$0+0+0$
② $R_1 \leq r \leq R_2$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 + 0$
③ $R_2 \leq r \leq R_3$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0$
④ $r \geq R_3$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

V $\Rightarrow$ la differenza di potenziale tra due conduttori

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

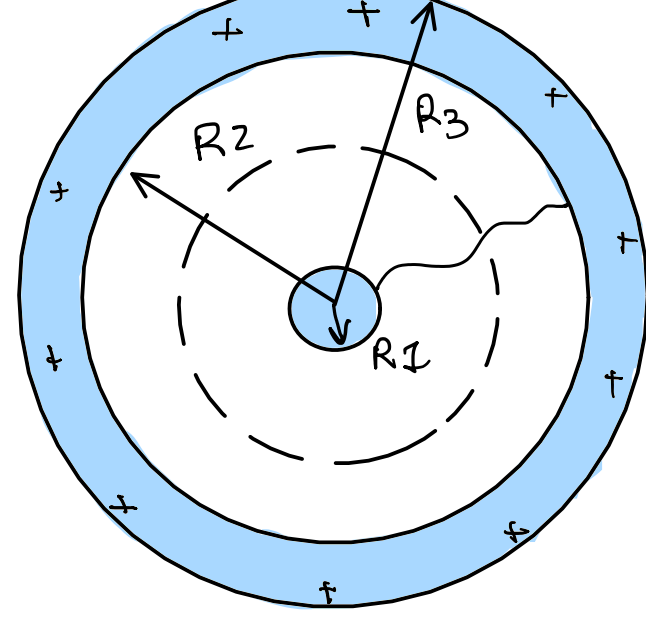
b)

la carica interna si annulla quindi:

$$r < R_3$$

$$E=0$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

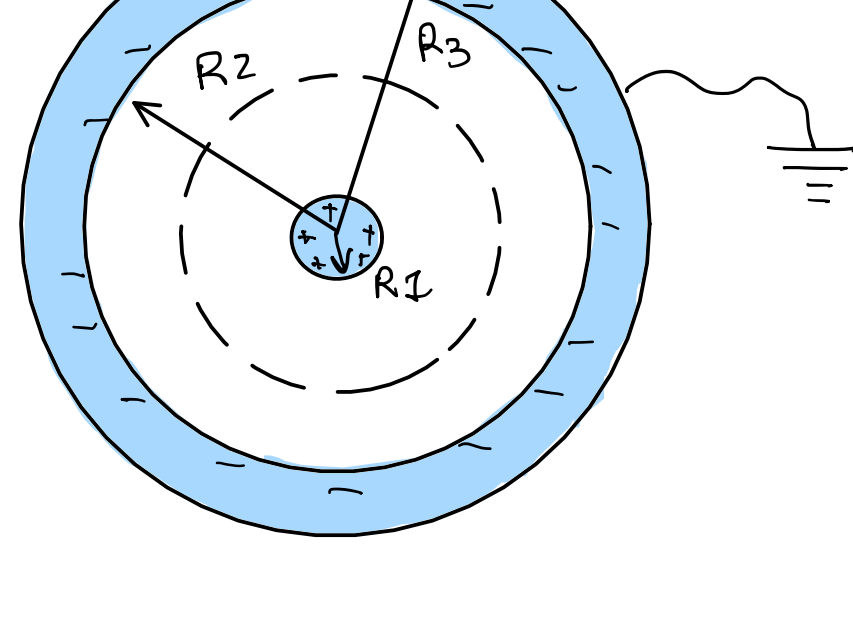


$$r > R$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

c)



$r > R_2$

$E=0$

$V=0$

$R_1 < r < R_2$

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

$$r < R_1$$

$$E=0$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

ESERCIZIO 2

Calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2

Soluzione

$$U = \int dU = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

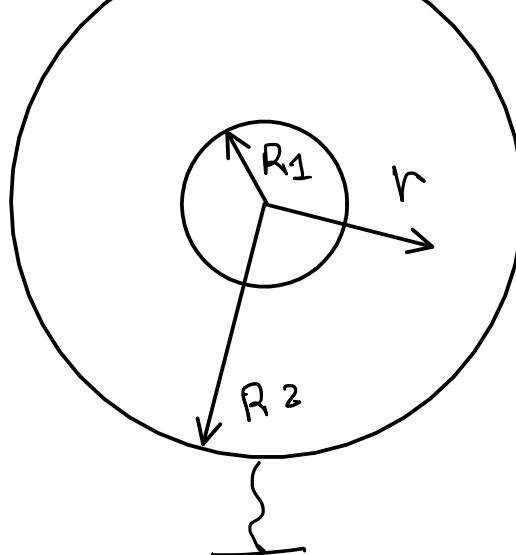
$$d\tau = 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr =$$

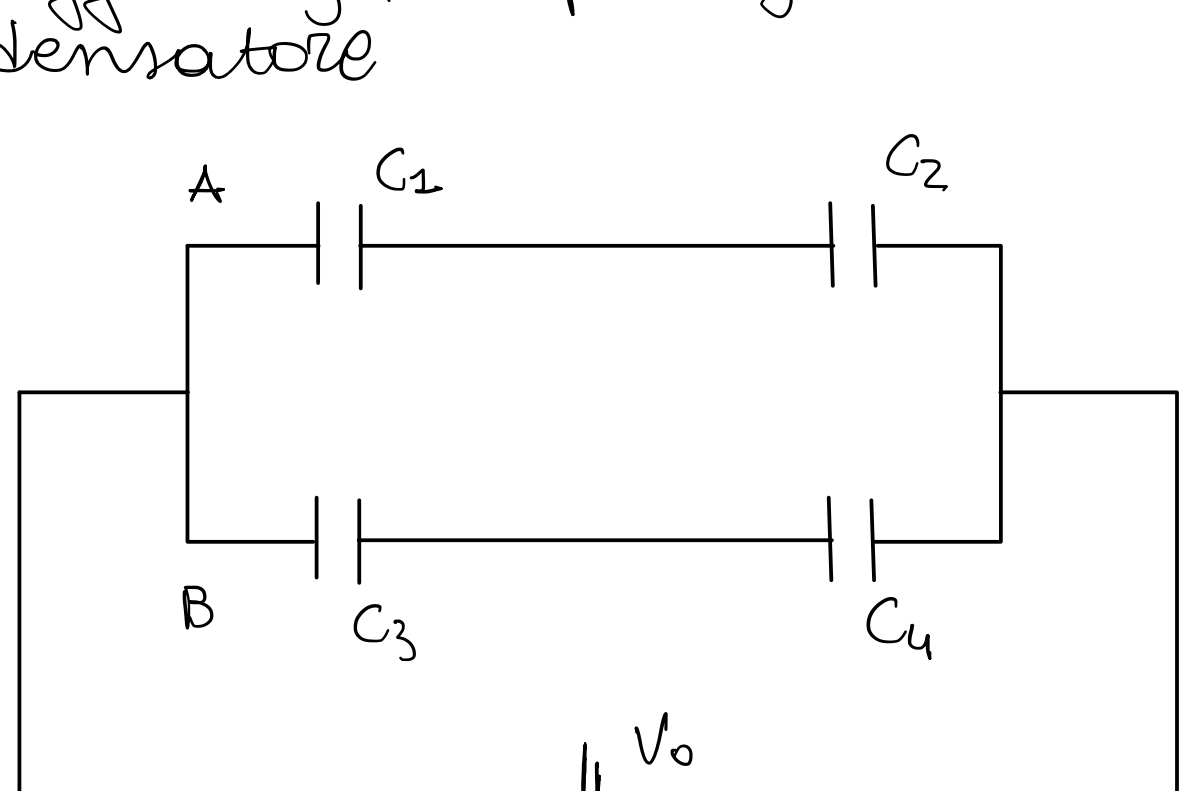
$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$U = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



ESERCIZIO 3

Nel sistema di condensatori in figura $C_1=20\text{ nF}$, $C_2=40\text{ nF}$, $C_3=50\text{ nF}$, $C_4=30\text{ nF}$ e $V_0=90\text{ V}$. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} del sistema tra i punti P e Q e la differenza di potenziale V_i ai capi di ciascun condensatore



$$C_A = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 13.3\text{ nF} \quad C_B = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 18.8\text{ nF}$$

$$C_{eq} = C_A + C_B = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 32.1\text{ nF}$$

Per induzione $Q_1 = Q_2 = Q_A$ e $Q_3 = Q_4 = Q_B$

$$Q_A = C_A \cdot V_0 = 119.7\text{ nC}$$

$$Q_B = C_B \cdot V_0 = 1687.5\text{ nC}$$

$$V_1 = \frac{Q_A}{C_1} = 50\text{ V}$$

$$V_3 = \frac{Q_B}{C_3} = 33.75\text{ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_A}{C_2} = 30\text{ V}$$

$$V_4 = \frac{Q_B}{C_4} = 56.25\text{ V}$$

ESERCIZIO 4

Un cavo sottomarino ha un conduttore interno di diametro $d_1=2\text{ cm}$ circondato da uno schermo conduttore di diametro interno $d_2=4\text{ cm}$, tra i conduttori c'è Teflon, $K_e=2.2$. Per un cavo lungo $L=1\text{ km}$ calcolare:

a) la capacità C del cavo

b) l'energia elettrostatica U_e immagazzinata, quando la differenza di potenziale tra i conduttori è $V=20\text{ kV}$

Soluzione

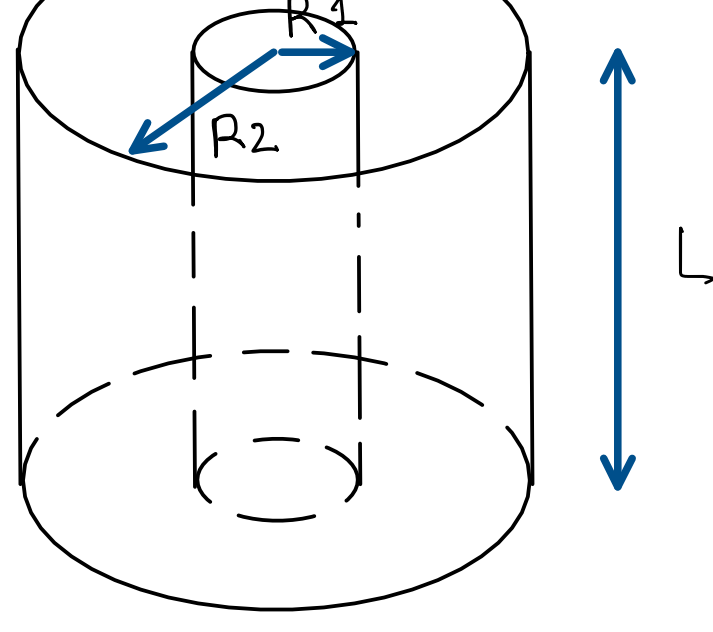
$$a) \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 K_e L}{\ln(R_2/R_1)} = 476.5\text{ nF}$$

$$b) \quad U_e = \frac{1}{2} C V^2 = 35.3\text{ J}$$

NOTA: capacità di un condensatore cilindrico

$$C = \frac{Q}{V}$$

Dobbiamo determinare la differenza di potenziale di un condensatore cilindrico



$$V = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

Teorema di Gauss per determinare E (uso un cilindro di raggio r , $R_1 < r < R_2$ e altezza L)

$$\Phi(E) = 2\pi r L E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$\Rightarrow V = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Con la capacità bisogna considerare il modulo di V e Q

$$\Rightarrow C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$