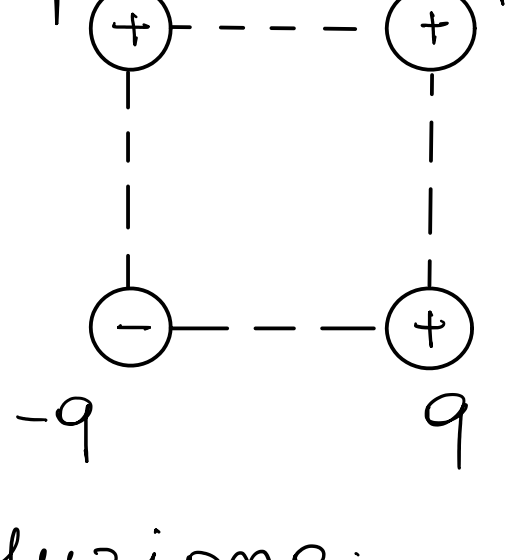


ESERCIZIO 1

Quattro particelle di massa $m = 10^{-10}$ kg e carica $q = 1$ pC, tre positive e una negativa, sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 10$ mm come in figura. La particella in alto a destra viene poi rilasciata, lasciando le altre vincolate al loro posto.

1. Dove si dirigerà?

2. Che velocità avrà quando si troverà a grandissima distanza dalle altre cariche



Soluzione:

I campi prodotti dalla carica in alto a sinistra e da quella in basso a destra sono uguali in modulo, e diretti rispettivamente lungo il verso positivo dell'asse x e lungo il verso positivo dell'asse y . Il campo risultante, che possiamo chiamare $\vec{E}_+$, ha espressione

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} (\hat{x} + \hat{y})$$

Il campo prodotto dall'unica carica negativa ha invece modulo

$$E_- = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 \ell^2}$$

poiché la distanza che separa la carica e il punto in cui stiamo valutando il campo è, in questo caso, $\sqrt{2}\ell$, la diagonale del quadrato. Per proiettare lungo x e y dobbiamo moltiplicare per $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ottenendo

$$\vec{E}_- = -\frac{q}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 \ell^2} (\hat{x} + \hat{y})$$

Sommando $\vec{E}_+$ e $\vec{E}_-$ otteniamo il campo complessivamente prodotto dalle tre cariche

$$\vec{E} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} (\hat{x} + \hat{y})$$

Il prefattore numerico $1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$ è positivo, quindi il verso è positivo lungo la direzione individuata da $\hat{x} + \hat{y}$, che è inclinata di 45° rispetto all'asse x . La carica rilasciata è positiva: si muoverà pertanto lungo il verso positivo del campo percepito, allontanandosi dal quadrato. Sostituendo con i dati del problema si ottiene

$$\vec{E} = 58.1 (\hat{x} + \hat{y}) \frac{N}{C}$$

Per calcolare la velocità a grandissima distanza conviene ragionare sulla conservazione dell'energia. La particella inizialmente è ferma, ma ha un'energia potenziale dovuta all'interazione elettrostatica con le altre tre particelle del quadrato. Aumentando la distanza l'interazione elettrostatica diminuisce e l'energia potenziale viene convertita in energia cinetica, la conversione sarà totale solo nel limite di distanza infinita. Possiamo dunque scrivere l'equivalenza

$$qV_0 = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

dove V_0 rappresenta il potenziale sentito dalla carica nella configurazione iniziale, e v_∞ la velocità raggiunta all'infinito. Per calcolare V_0 sommiamo i contributi delle altre tre cariche:

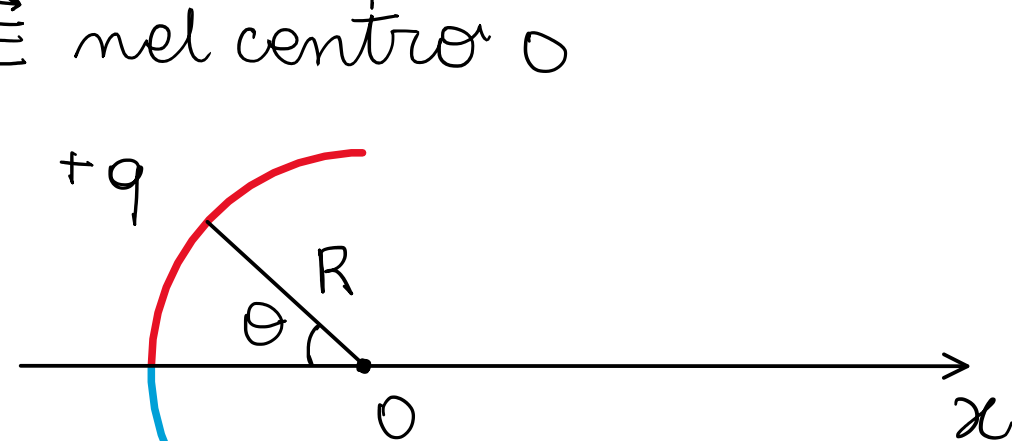
$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}\ell)} = \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell}$$

Inserendo questo risultato si ottiene

$$v_\infty = \sqrt{\frac{(4 - \sqrt{2})q^2}{4\pi\epsilon_0 m\ell}} = 0.15 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 2

Un asticciola di vetro è piegata a semicirconferenza di raggio $R = 10$ cm. Su una metà è distribuita uniformemente la carica $q = 5 \cdot 10^{-9}$ C e sull'altra una carica $-q = -5 \cdot 10^{-9}$ C. Calcolare il campo elettrostatico $\vec{E}$ nel centro O .



Soluzione

Poiché la carica è distribuita uniformemente in ogni quadrante la lunghezza di ogni tratto è

$$L = \frac{1}{4} (2\pi R) = \frac{1}{2} \pi R$$

la densità di carica per la parte positiva è

$$\lambda = \frac{q}{L} = 3.18 \cdot 10^{-18} \text{ C/m}$$

Parte superiore: ogni elemento dq genera un campo dE_+ diretto verso il IV quadrante

Parte inferiore: ogni elemento dq genera un campo dE_- diretto verso il III quadrante

Di conseguenza le componenti orizzontali sono uguali e opposte, quindi si cancellano, $E_x = 0$. Invece, le componenti verticali puntano entrambe verso il basso e quindi si sommano

Consideriamo un elemento infinitesimo di arco $ds = R d\phi$. Il modulo del campo elettrico prodotto da questo elemento è:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} d\phi$$

Definiamo l'angolo ϕ partendo dall'asse negativo. La componente verticale per la metà superiore è $dE_y = -dE \sin \phi$. Integriamo tra 0 e $\frac{\pi}{2}$:

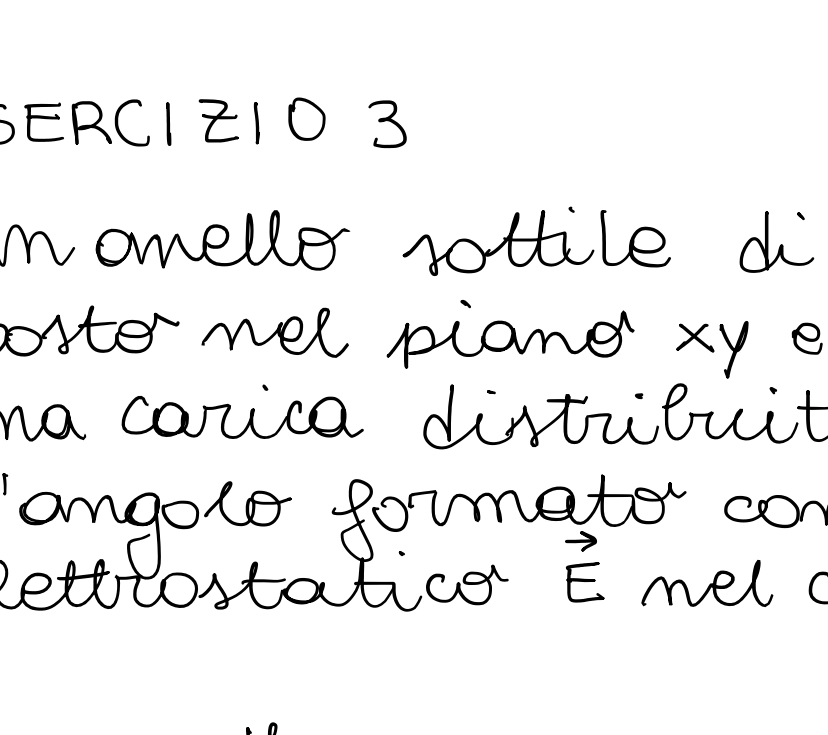
$$E_{+y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \phi d\phi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Il campo totale lungo la componente y è il doppio di questo

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{y} = -5723 \frac{N}{C} \hat{y}$$

ESERCIZIO 3

Un anello sottile di materiale isolante di raggio R , posto nel piano xy e con centro nell'origine O , possiede una carica distribuita con densità $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$, dove ϕ è l'angolo formato con l'asse x . Determinare il campo elettrostatico $\vec{E}$ nel centro O .



Soluzione

Consideriamo un elemento infinitesimo di arco $ds = R d\phi$ situato ad un angolo ϕ . La carica contenuta in questo elemento è:

$$dq = \lambda ds = \lambda_0 \sin \phi R d\phi$$

Il campo elettrico dE generato da dq nel centro O è diretto verso l'origine e ha modulo

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{\lambda_0 \sin \phi d\phi}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Dobbiamo scomporre dE in componenti. Il vettore posizione della carica è $\vec{r} = (R \cos \phi, R \sin \phi)$, quindi il vettore che punta dalla carica al centro è

$$\hat{u} = (-\cos \phi, -\sin \phi):$$

$$dE_x = -\cos \phi dE = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \phi \cos \phi d\phi$$

$$dE_y = -\sin \phi dE = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \sin^2 \phi d\phi$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi = 0$$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}$$

Il campo elettrostatico nel centro è:

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \hat{y}$$