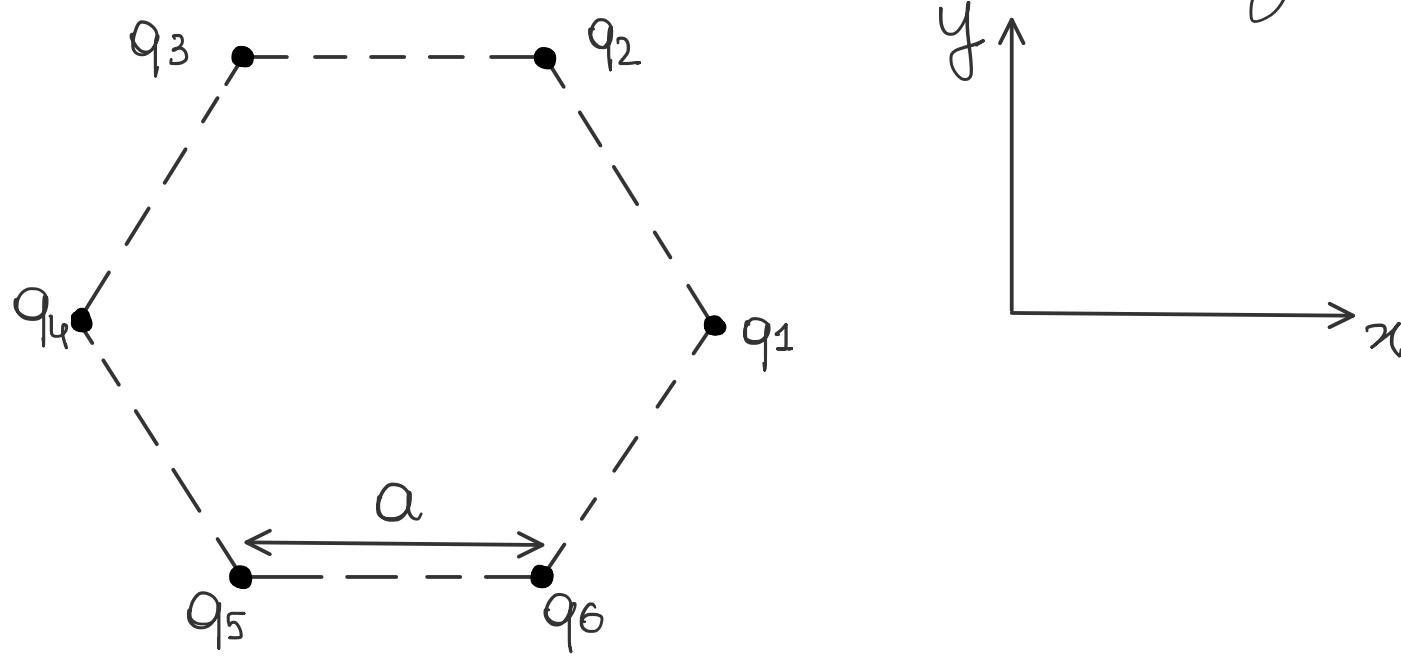


ES.1

Sei cariche $q_n = nq$, con $n=1,2,\dots,6$ e $q=10\text{ pC}$, sono disposte ai vertici di un esagono regolare di lato $a=10\text{ cm}$ come in figura. Calcolare le componenti lungo gli assi x e y del campo elettrico al centro dell'esagono.



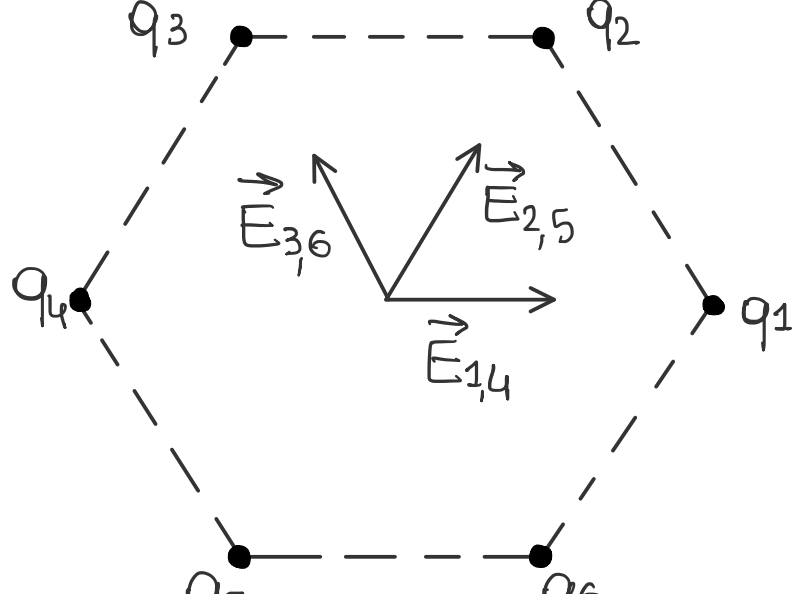
Soluzione

La carica q_n produce un campo elettrico che al centro dell'esagono vale, in modulo,

$$E_n = \frac{nq}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Notiamo che sommando lungo le rette congiungenti le coppie di vertici opposte si ottengono tre campi, che denotiamo con $\vec{E}_{14}$, $\vec{E}_{25}$ ed $\vec{E}_{36}$ di modulo

$$E_{n,n+3} = E_{n+3} - E_n = \frac{(n+3)q}{4\pi\epsilon_0 a^2} - \frac{nq}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$



Guardando il disegno vediamo che la componente x del campo risultante $\vec{E}$ è uguale a E_{14} , poiché nella somma degli altri due vettori le componenti orizzontali si cancellano per simmetria. La componente y di $\vec{E}$ sarà data invece dalla somma delle proiezioni di $\vec{E}_{25}$ ed $\vec{E}_{36}$ lungo l'asse y , ossia

$$E_y = E_{25} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + E_{36} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

In definitiva avremo quindi

$$\vec{E} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{x} + \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{y}$$

e sostituendo i valori numerici

$$E_x = 26.96 \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad E_y = 46.70 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

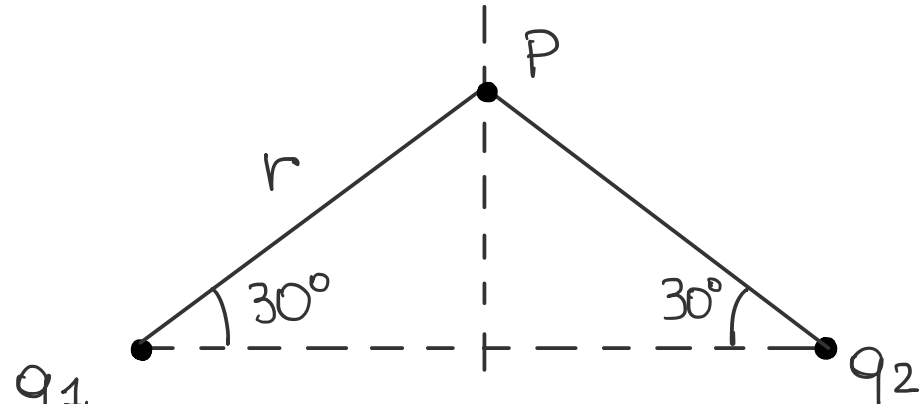
Il modulo di $\vec{E}$ è invece pari a

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2} = 53.92 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

La direzione è quella di $\vec{E}_{25}$: lo si può capire ragionando sulla somma di $\vec{E}_{14}$ e $\vec{E}_{36}$. Le componenti perpendicolari alla direzione di $\vec{E}_{25}$ si cancellano per simmetria, e rimangono solo le componenti parallele

ES.2

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono separate da una distanza $\ell = 1\text{ cm}$. Si vuole determinare il campo elettrico risultante $\vec{E}$ (nelle sue componenti E_x e E_y) in un punto P situato al vertice di un triangolo isoscele che ha per base il segmento che unisce le due cariche. Gli angoli alla base del triangolo sono di 30° . Il valore assoluto delle cariche è $q = 1\text{ pC}$



Si calcoli il campo in due configurazioni distinte:

1. Cariche concordi: $q_1 = q_2 = q$
2. Cariche discordi: $q_1 = -q_2 = q$

Soluzione

Per prima cosa dobbiamo trovare la distanza r tra ogni carica e il punto P . Dalla trigonometria sappiamo che:

$$\frac{\ell}{2} = r \cos 30^\circ = r \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Risolvendo rispetto a r , otteniamo:

$$r = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$$

Il campo elettrico totale è la somma vettoriale dei campi prodotti dalle singole cariche: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Scomponendo i vettori lungo gli assi x e y si ottiene:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[q_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) + q_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 - q_2}{2r^2} \hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{2r^2} \hat{y}$$

1) Cariche uguali

In questo caso le componenti orizzontali si annullano per simmetria, mentre quelle verticali si sommano

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{\ell^2} \hat{y} = 269.6 \frac{\text{N}}{\text{C}} \hat{y}$$

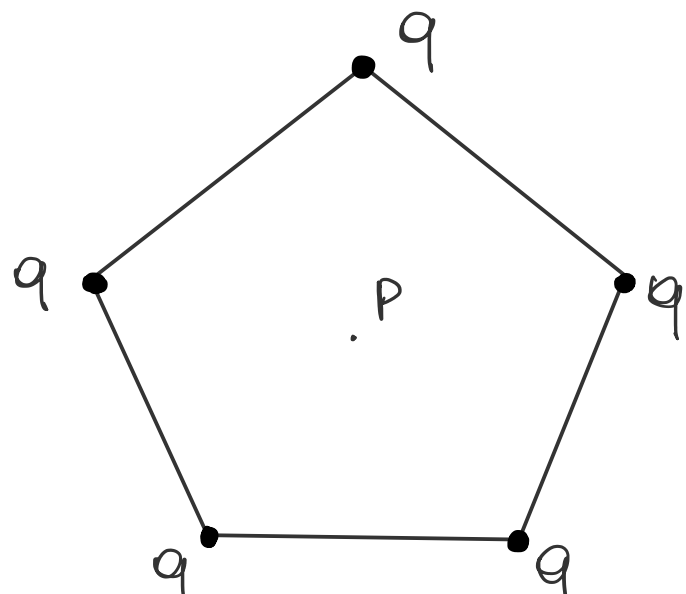
2) Cariche opposte

Qui abbiamo il contrario: le componenti verticali si annullano mentre quelle orizzontali si sommano

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{\ell^2} \hat{x} = 467 \frac{\text{N}}{\text{C}} \hat{x}$$

ES.3

Cinque cariche puntiformi identiche di carica $q = 10\text{ pC}$ sono posizionate ai vertici di un pentagono regolare dove la distanza dal centro al vertice è pari a $d = 0.85\text{ cm}$.



Si richiede di calcolare il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel centro del pentagono in due scenari:

- 1.) Tutte e cinque le cariche sono presenti nei vertici
- 2.) Viene rimossa la carica in alto

Soluzione

- 1.) Per ragioni di simmetria, il campo elettrico risultante nel centro di un poligono regolare con cariche identiche ai vertici è sempre nullo

$$E_{\text{tot}} = 0$$

- 2.) Per trovare il campo senza una carica usiamo il principio di sovrapposizione. Sappiamo che:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{carica-alto}} + E_{\text{altre-4}} = 0$$

Da questa uguaglianza deduciamo che il campo prodotto dalle restanti 4 cariche deve essere uguale e opposto a quello prodotto dalla carica in alto

$$E_{\text{altre-4}} = -E_{\text{carica-alto}}$$

Il campo risultante avrà lo stesso modulo di quello generato da una singola carica posta alla distanza d , ma verso opposto

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} = 1244 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$