

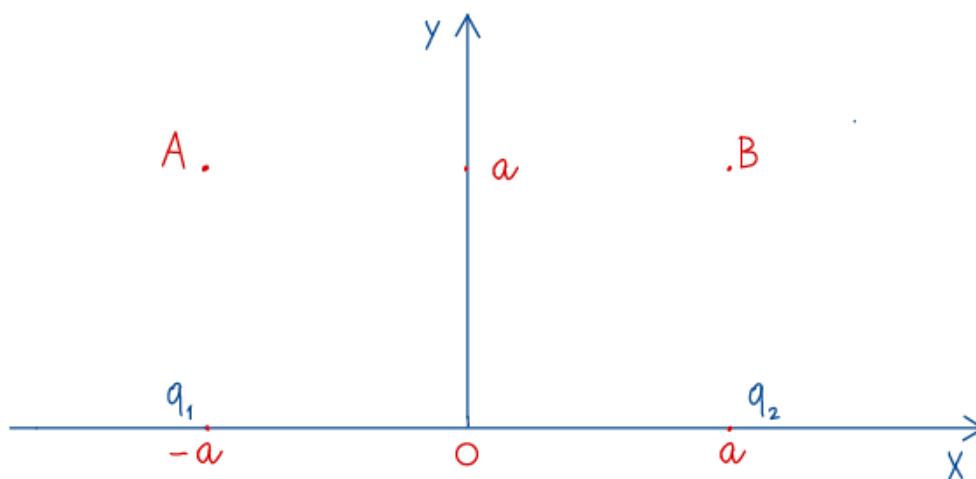
Prova scritta di Fisica Generale 2
Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Fisica - 1 Febbraio 2021

Problema 1

Si consideri il sistema composto dalle cariche $q_1 < 0$ e $q_2 = -q_1/2$, poste sull'asse x e distanti $d = 2a$ (si veda la figura). Determinare

1. il campo elettrostatico nell'origine O del sistema di riferimento equidistante dalle due cariche,
2. la forza esercitata su una carica $q > 0$ posta nel punto $A \equiv (-a, a)$,
3. il lavoro che vien fatto dal campo elettrostatico se la carica q viene spostata dal punto A al punto $B \equiv (a, a)$.

Domanda: si descrivano le principali proprietà dei conduttori.



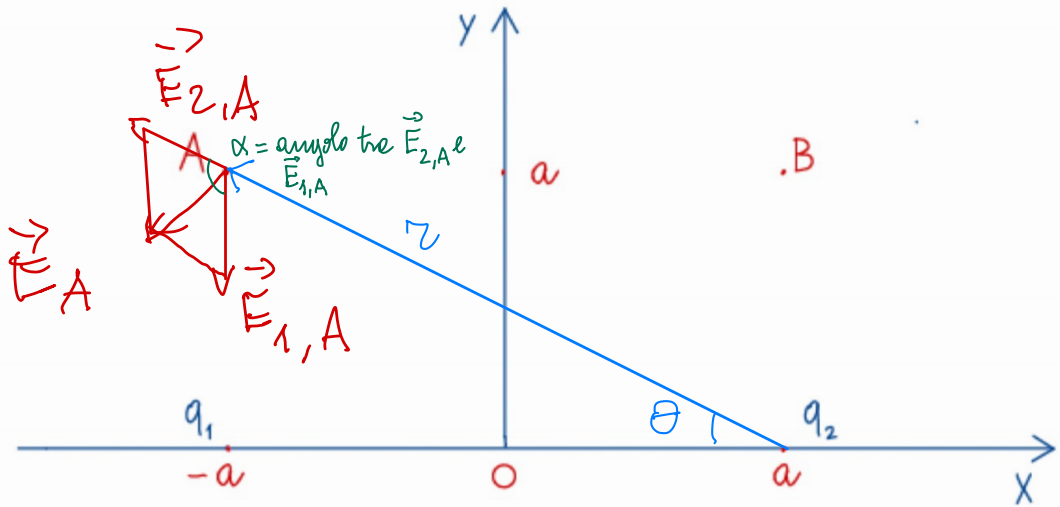
1. $\vec{E}$ nell'asse x tra $-a$ e a

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \vec{E}_1(x, 0, 0) + \vec{E}_2(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{(a+x)^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right] \vec{u}_x$$

Per cui

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x$$

2.



$$r = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5} a \quad \cos \theta = \frac{2a}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Si ha quindi

$$\vec{E}_{1,A} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_{2,A} = -\frac{q_2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 (a\sqrt{5})^2} \vec{u}_x + \frac{q_2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 (a\sqrt{5})^2} \vec{u}_y$$

$$= -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2}{5\sqrt{5}} \vec{u}_x + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{5\sqrt{5}} \vec{u}_y$$

da cui segue che la forza richiesta è

$$\vec{F}_A = q(\vec{E}_{1,A} + \vec{E}_{2,A}) \overset{q_2 = -\frac{q_1}{2}}{\downarrow} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{1}{5\sqrt{5}} \vec{u}_x + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 5\sqrt{5}}\right) \vec{u}_y \right]$$

3. la d.d.p. tra i punti B e A è

$$V_B - V_A = \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \right) - \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right) (q_1 - q_2) =$$

$$= \frac{3(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5} \cdot 8\pi\epsilon_0 a} q_1$$

da cui segue che il lavoro fatto dal campo per spostare la carica da A a B è

$$W_{AB} = -q(V_B - V_A) = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5} \cdot 8\pi\epsilon_0 a} qq_1$$

Poiché $qq_1 < 0$ si ha $W_{AB} < 0$ per cui è necessario un lavoro esterno al campo.

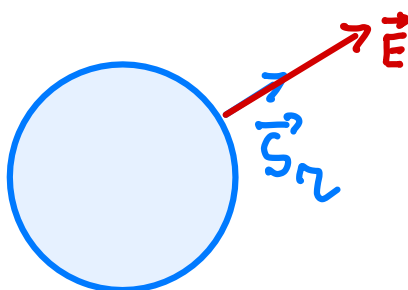
Problema

Si consideri un guscio sferico centrato in O , di raggio interno a ed esterno b , con densità di carica volumetrica $\rho = A/r$, dove r è la distanza da O e A una costante. Determinare

1. il campo elettrico $\forall r$;
2. il potenziale elettrico $\forall r$, richiedendo che questo sia nullo nell'origine;
3. campo e potenziale elettrici $\forall r$ nel caso che si aggiunga una carica puntiforme q in O ;
4. la costante A in modo tale che il campo elettrico, considerato nel punto precedente, abbia intensità costante all'interno del guscio.

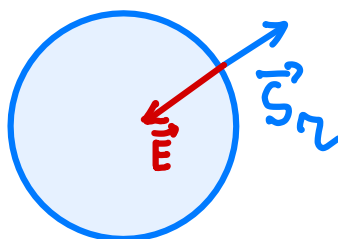
La simmetria sferica del problema implica che $\vec{E}$ è parallelo o antiparallelo alla direzione e verso della superficie sferica orientata $\vec{S}_r$.

$$A > 0$$



$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

$$A < 0$$



$$\vec{E} = -E(r) \vec{u}_r$$

Quindi, per quanto riguarda il flusso, si ha

$$\Phi_{S_r}(\vec{E}) := \oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \oint_{S_r} E(r) dS = E(r) \oint_{S_r} dS = E(r) 4\pi r^2 & A > 0 \\ - \oint_{S_r} E(r) dS = -E(r) \oint_{S_r} dS = -E(r) 4\pi r^2 & A < 0 \end{cases}$$

e $\Phi_{S_r}(\vec{E}) = 0$ se $A = 0$.

Quindi $\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \text{sgn}(A) E(r) 4\pi r^2$

dove $\text{sgn}(A)$ è la funzione segno. Alternativa
mente si può scrivere

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 4\pi r^2$$

sottintendendo che $E(r)$ non è $|\vec{E}(r)|$ bensì
 $\pm |\vec{E}(r)|$ con il segno fissato dal segno della
carica.

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si ha quindi il seguente risultato:

la simmetria sferica implica che per $\forall r$ si ha

$$\Phi_{S_r}(\vec{E}) = \text{sgn}(q) |\vec{E}| 4\pi r^2$$

dove q è la carica racchiusa in S_r . Quindi

la legge di Gauss implica che nel caso di simmetria sferica si ha

$$\vec{E}(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

dove $q(r)$ è la carica racchiusa in S_r .

D'altronde la simmetria sferica è determinata

della distribuzione di carica. Si hanno i seguenti casi

distribuzione di carica

q int a S_R

Simile carica q

q=0 incluso

$\rho(r)$

$$dT = \int \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, r^2 \, dr$$

q

$$\theta \in [0, \pi)$$

$$\phi \in [0, 2\pi)$$

$$4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \, dr'$$

σ uniforme su S_R

$$4\pi \sigma R^2 \quad \text{per } r \geq R$$

$$0 \quad \text{per } r < R$$

Si noti che se $\rho(r) = 0$ per $r \geq R$, allora

$$\int_0^{r \geq R} \rho(r') r'^2 \, dr' = \int_0^R \rho(r') r'^2 \, dr'$$

Si noti che la distribuzione sferica si ha anche con un'arbitraria combinazione dei precedenti 3 casi.

Soluzione

1. L'assenza di cariche in $r < a$ e la simmetria sferica del problema, implicano

$$E(r < a) = 0 .$$

Sia S_r la sfera di raggio r . Nel caso $r \geq a$ si ha

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 E = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \int_a^r \frac{r'^2}{r'} dr' = \frac{4\pi A}{2\epsilon_0} (r^2 - a^2) ,$$

$$E(a \leq r \leq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) .$$

$$E(r \geq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r^2} .$$

Si noti che nella relazione

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 E ,$$

il termine E nel secondo membro non coincide necessariamente con il modulo di $\vec{E}$, cioè $|\vec{E}|$. Infatti, si ha che può essere sia $E = +|\vec{E}|$ che $E = -|\vec{E}|$, cosa che dipende dal segno di A . Nello scrivere $\oint_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 E$ si è quindi usato il solo fatto che $\vec{E}$ può essere sia parallelo che anti-parallelo alla direzione e verso della superficie sferica S_r , proprietà che segue dalla simmetria sferica del problema.

2. Essendo $E = 0$ per $r \leq a$, $V(r \leq a)$ deve esser costante. La richiesta $V(0) = 0$ implica che tale costante è nulla, quindi

$$V(r \leq a) = 0 .$$

Essendo $E = -\partial_r V$, si ha

$$V(a \leq r \leq b) = -\frac{A}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + c ,$$

con c una costante. Imponendo la continuità¹ a $r = a$, si ha

$$0 = V(r = a) = -\frac{A}{2\epsilon_0} (a + a) + c ,$$

¹Poiché $\vec{E}$ è una quantità osservabile (cioè misurabile sperimentalmente) segue che $\vec{E} = -\partial_r V \vec{u}_r$ deve essere quantità definita, anche se derivata e sinistra possono non coincidere. Più precisamente, poiché una discontinuità di $\vec{E}$ è fisicamente ammissibile, segue che la derivata sinistra di V in un dato punto può non coincidere con quella destra. La continuità di V è comunque una proprietà necessaria.

da cui $c = Aa/\epsilon_0$, quindi

$$V(a \leq r \leq b) = -\frac{A}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{a^2}{r} - 2a \right) .$$

Nella regione $r \geq b$ si ha

$$V(r \geq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r} + c' ,$$

con c' una costante da determinare. Imponendo la condizione di raccordo

$$-\frac{A}{2\epsilon_0} \left(b + \frac{a^2}{b} - 2a \right) = V(r = b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{b} + c' ,$$

si ottiene

$$c' = \frac{A}{\epsilon_0} (a - b) ,$$

ovvero

$$V(r \geq b) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2}{r} + \frac{A}{\epsilon_0} (a - b) ,$$

3.

$$E(r \leq a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

$$E(a \leq r \leq b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{A}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) .$$

$$E(r \geq b) = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{q}{2\pi} + A(b^2 - a^2) \right) \frac{1}{r^2} .$$

Per il principio di sovrapposizione, il potenziale è dato dal potenziale generato dalla carica q , pari a $q/(4\pi\epsilon_0 r)$, a cui è possibile aggiungere una costante arbitraria, sommato a quello calcolato nel punto 2.

4. Il termine $1/r^2$ si cancella per

$$A = \frac{q}{2\pi a^2} .$$

In tal caso

$$E(a \leq r \leq b) = \frac{q}{4\pi a^2 \epsilon_0} .$$

$$E(r \geq b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{r^2} .$$