

PROBLEMI D'ESAME 6

25.05.2022

PROBLEMA 8

Determinare una possibile funzione $f(x, y, z)$ in modo tale che il campo vettoriale

$$\vec{E} = C(yf, xf, xy) \quad 1)$$

con C una costante, sia conservativo.

$\vec{E}$ è conservativo se e solo se $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$,

$\forall \gamma \mid \partial\gamma = \emptyset$. Equivalientemente, se e solo se

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

che sono le 3 equazioni

Componente di $\vec{\nabla} \times \vec{E}$

$$x: \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$y: \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$z: \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

2)

Sostituendo 1) in 2) si ha per la componente x

$$x: x - x \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

che implica

$$f = z + g(x, y) \quad 3)$$

con g una qualche funzione di x, y .

La condizione dovuta alla componente y è soddisfatta per qualsiasi $g(x, y)$

$$\frac{\partial [y(z + g(x, y))]}{\partial z} - \frac{\partial xy}{\partial x} = y - y = 0$$

La condizione dovuta alla componente z è

$$\frac{\partial [x(z + g(x, y))]}{\partial x} - \frac{\partial [y(z + g(x, y))]}{\partial y} = 0$$

$$\cancel{z} + \cancel{g(x, y)} + x \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \cancel{z} - \cancel{g(x, y)} - y \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad 4)$$

che ha come possibile soluzione $g = 0$.

Quindi

$$f(x, y, z) = z$$

Si verifica immediatamente che in tal caso

$$\vec{E} = c \vec{\nabla}(xyz)$$

Quest'ultimo è un risultato atteso, infatti se un campo vettoriale $\vec{A}$ ha rotore nullo, cioè $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$, allora $\vec{A}$ è il gradiente di un qualche campo scalare $h(x, y, z)$, cioè $\vec{A} = \vec{\nabla} h(x, y, z)$.

APPROFONDIMENTO

Un'altra soluzione di 4) è

$$g_k(x, y) = (xy)^k \quad 5)$$

Si noti che poiché l'eq. 4) è lineare e per ogni k la 5) è soluzione della 4), segue che

$$f(x, y, z) = z + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (xy)^k$$

è soluzione della 2) per qualsiasi scelta dell'insieme $\{c_k | k \in \mathbb{Z}\}$. Più generalmente si ha

$$f(x, y, z) = z + h(xy)$$

con h qualsiasi funzione derivabile. Quindi

$$\vec{E} = C(y(z + h(xy)), x(z + h(xy)), xy)$$

è un campo conservativo.

PROBLEMA 9

Determinare campo elettrostatico e potenziale elettrostatico per una distribuzione di carica $\rho(r)$ che è nulla per $r > R$.

Consideriamo il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sferica di raggio r , S_r^2

$$\Phi(\vec{E}) := \oint_{S_r^2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Si noti che essendo S_r^2 una superficie chiusa, il verso di $d\vec{S}$ è canonicamente scelto uscente da S_r^2 . La simmetria sferica implica che $\vec{E}$ è perpendicolare a S_r^2 e quindi parallelo o antiparallelo a $\vec{r}$. Inoltre, tale simmetria implica

$$\vec{E}(x, y, z) = E(r) \vec{u}_r$$

con $E(r)$ che può essere sia negativo che positivo o nullo. Si ha quindi

$$\oint_{S_r^2} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{S_r^2} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r d\Sigma = \oint_{S_r^2} E(r) d\Sigma$$

D'altronde la superficie d'integrazione ha r costante, per cui

$$\oint_{S_r^2} (\vec{E}) = E(r) \oint_{S_r^2} d\Sigma = 4\pi r^2 E(r)$$

e la legge di Gauss implica

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

da cui

$$\vec{E}(r) = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

D'altronde

$$q(r) = \int_{V_r} \rho(r') d\tau$$

dove V_r è il solido sferico di raggio r .

È conveniente scegliere le coordinate sferiche, per cui $d\tau = \sin\theta d\theta d\phi r^2 dr$ con $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, \infty)$.

Quindi

$$q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

da cui

$$\vec{E}(r) = \frac{\int_0^r \rho(r') r'^2 dr'}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

si noti che

$$q(r > R) = q(R)$$

Poiché

$$\vec{E}(r) = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r$$

si ha

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}'$$

che, usando

$$d\vec{r}' = \vec{u}_{r'} dr',$$

può esser riscritta nella forma

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r \left(\frac{\int_0^{r'} \rho(r'') r''^2 dr''}{\epsilon_0 r'^2} \right) dr'$$

PROBLEMA 10

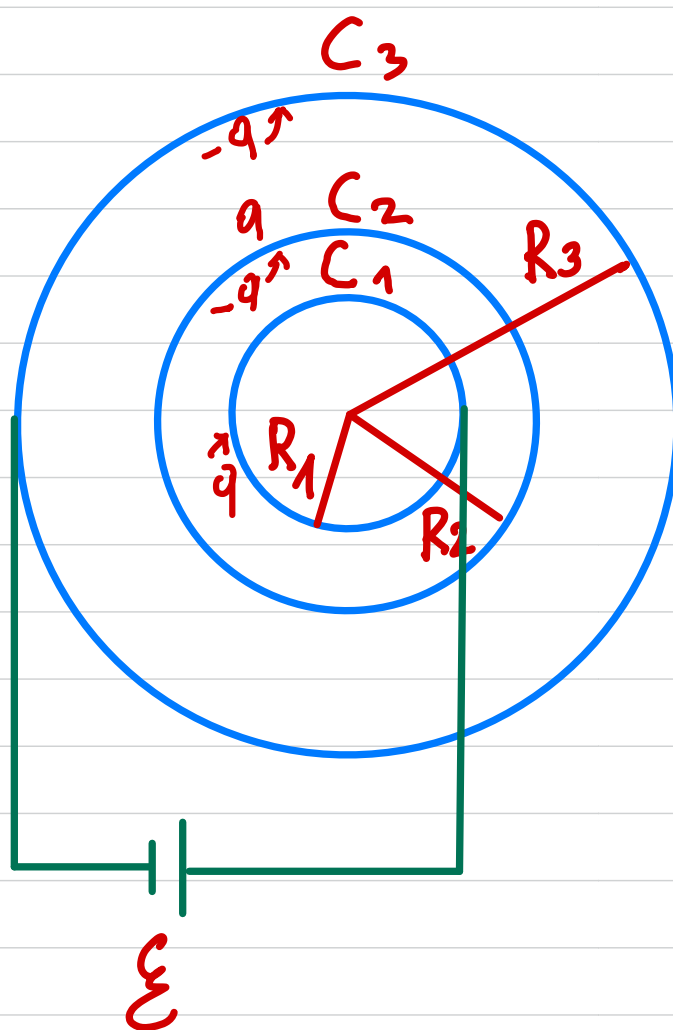
Tre conduttori sferici, concentrici, sottili isolati C_1, C_2, C_3 di raggi $R_1 = 5 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $R_3 = 22 \text{ cm}$ sono inizialmente scarichi. I capi di un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ sono collegati ai capi di C_1 e C_3 . Determinare

1. la carica trasferita ai due conduttori del generatore

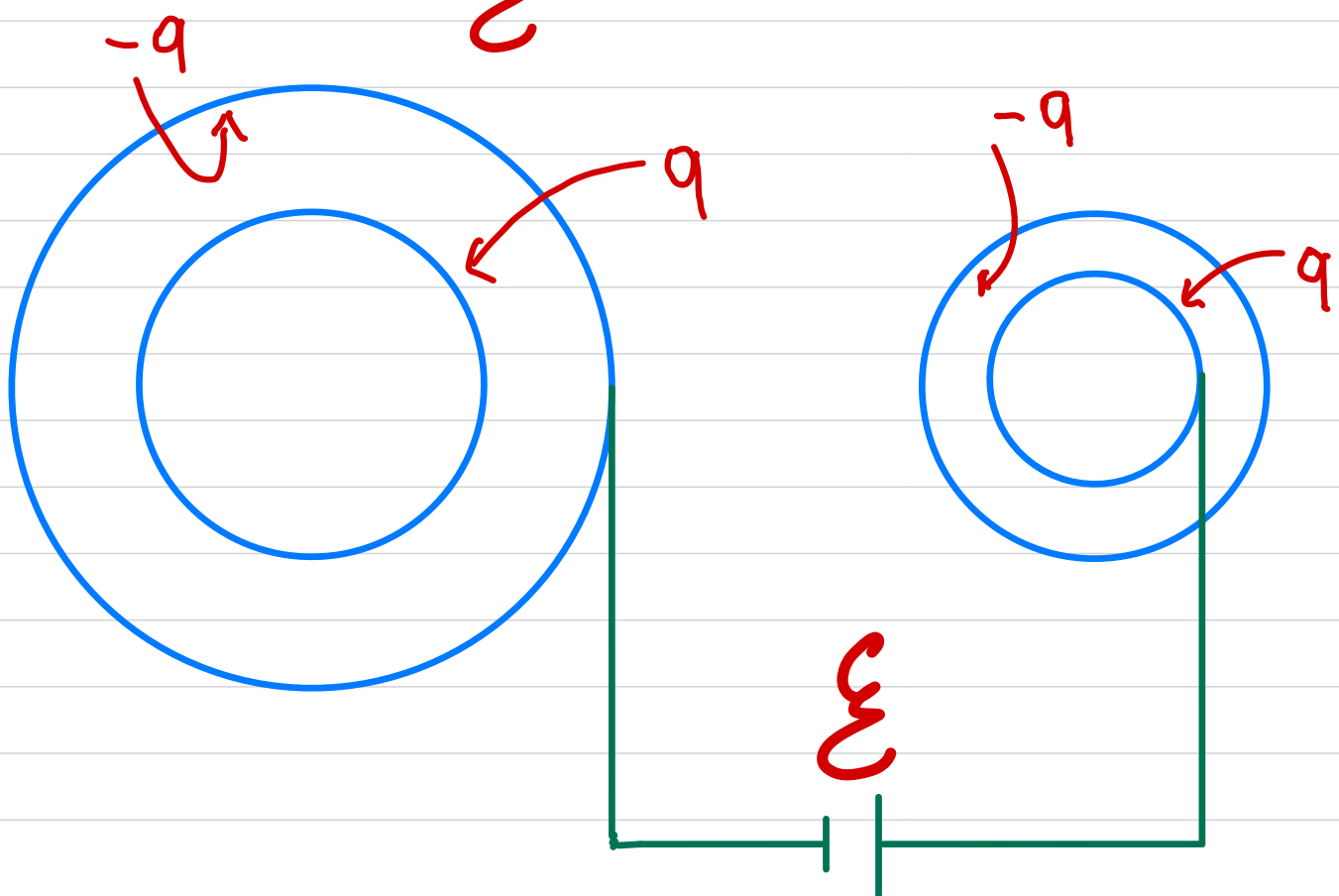
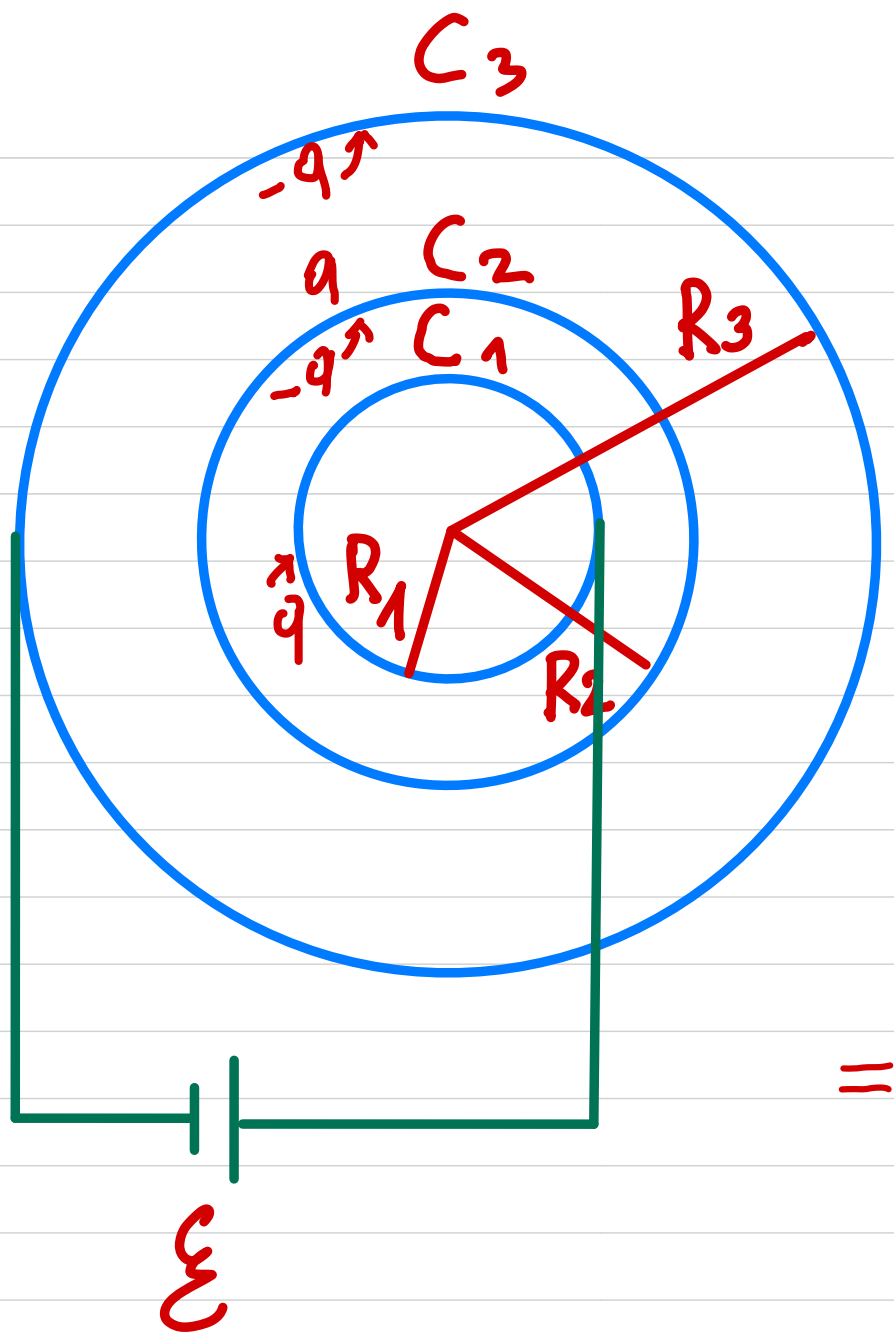
Successivamente la calotta tra C_2 e C_3 è riempita con un dielettrico con $\kappa = 4$. Determinare

2. l'energia elettrostatica U_e immagazzinata nel sistema

3. la carica di polarizzazione del dielettrico



1. Si tratta di due condensatori in serie



$$\xi = \frac{q}{C} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$$

per cui la carica a regime è

$$q = \xi C = 4\pi\epsilon_0 \xi \frac{R_3 R_1}{R_3 - R_1} = 71.9 \text{ pC}$$

2. La presenza del dielettrico modifica la capacità del condensatore esterno, cioè C_2 cambia in

$$C_2' = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2} = 117.3 \text{ pF}$$

mentre

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 9.5 \text{ pF}$$

per cui la nuova capacità equivalente è

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 8.79 \text{ pF}$$

Segue che l'energia elettrostatica immagazzinata è

$$U_e = \frac{1}{2} C' \mathcal{E}^2 = 4.4 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

3. Il generatore sposta carica sulle armature in modo da mantenere costante la differenza di potenziale $\mathcal{E}$. Quindi la carica presente sulle armature diventa

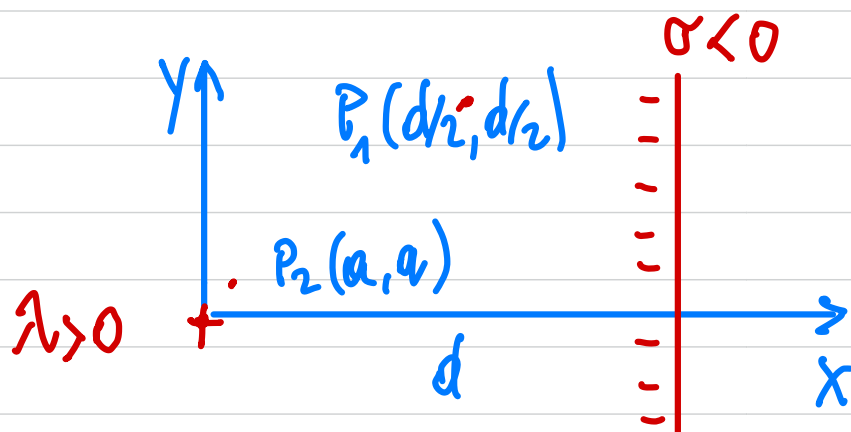
$$q' = \mathcal{E} C' = 88 \text{ pC}$$

e la carica di polarizzazione è

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q' = 66 \text{ pC}$$

PROBLEMA 11

Un filo rettilineo di densità di carica $\lambda = 100 \text{ nC/m}$ perpendicolare al foglio, dista $d = 2 \text{ cm}$ da un piano parallelo al piano yz che ha la densità di carica superficiale uniforme $\sigma = -1 \text{ } \mu\text{C/m}^2$.



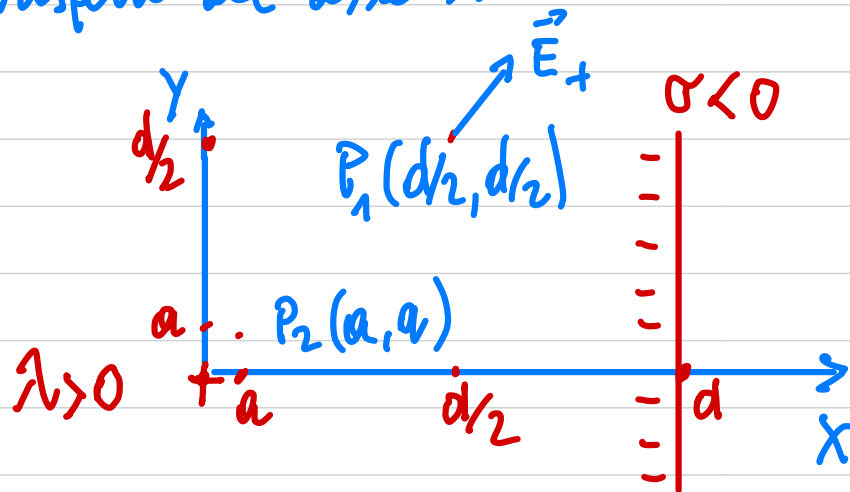
Calcolare

1. $|\vec{E}|$ in $P_1(d/2, d/2)$

2. la d.d.p. tra $P_2(a, a)$, $a = 1 \text{ mm}$, e P_1

$$1. \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$\vec{E}_+$: radiale uscente dal filo con angolo $\pi/4$ in P_1 rispetto all'asse x



$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 d} = 127 \text{ kV/m}$$

$\vec{E}_-$ è perpendicolare al piano ed entrante in esso

$$E_- = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = 56 \text{ kV/m}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$$

$$E_x = E_+ \cos \frac{\pi}{4} + E_- = 146 \text{ kV/m}$$

$$E_y = E_+ \cos \frac{\pi}{4} = 89.9 \text{ kV/m}$$

Quindi il modulo del campo elettrostatico in P_1 è

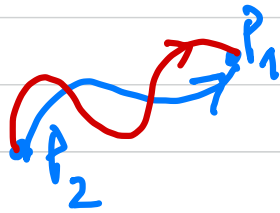
$$E(P_1) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 172 \text{ kV/m}$$

2.

$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) \cdot d\vec{s} = - \int_{\frac{d\sqrt{2}}{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$
$$- \int_{d/2}^{d-a} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a}{d} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(a - \frac{d}{2}\right) = 4.65 \text{ kV}$$

Si noti che nel calcolo degli integrali si è utilizzato il fatto che, grazie alla conservatività del campo elettrostatico, il risultato non dipende dal cammino di integrazione. Per questo, per ognuno dei due integrali, si è scelto il contorno che facilita il conto. Illustriamo di seguito la scelta fatta. Per comodità scambiamo gli estremi di integrazione, la differenza è un segno-

$\int_{P_2}^{P_1} \vec{E}_+ \cdot d\vec{s}$: possiamo scegliere qualsiasi $\gamma_{P_2 P_1}$, per esempio uno dei due seguenti



D'altronde $\vec{E}_+$ è diretto lungo $\vec{r}$, quindi

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y)}_{\vec{E}_+} \vec{u}_r \cdot d\vec{s}$$

Se scegliamo come contorno d'integrazione il segmento rettilineo che unisce P_2 a P_1 , con verso da P_2 a P_1 , allora

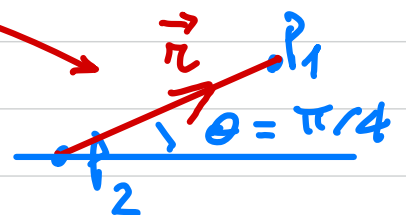
$d\vec{s} = d\vec{r}$ e P_1, P_2 vanno espressi con i valori di r in P_1 e P_2 , quindi

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y)}_{\vec{E}_+} \vec{u}_r \cdot d\vec{s} = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} f(x,y) \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

$\theta = \pi/4 \rightarrow r \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\vec{r} \cos \theta = r \sin \theta = r \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dove, come spiegato più avanti,

$$x = r \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad y = r \frac{\sqrt{2}}{2}$$



D'altronde $d\vec{r} = \vec{u}_n dr$, per cui

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y) \vec{u}_n}_{\vec{E}_+} \cdot d\vec{s} = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} f(x,y) \vec{u}_n \cdot d\vec{r} = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} f(x,y) dr$$

molto, poiché

$$r(P_1) = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$r(P_2) = a\sqrt{2}$$

si ha

$$\int_{P_2}^{P_1} \underbrace{f(x,y) \vec{u}_n}_{\vec{E}_+} \cdot d\vec{s} = \int_{a\sqrt{2}}^{\frac{d\sqrt{2}}{2}} f(x,y) dr$$

Si noti ora che l'integrale è unidimensionale
ma abbiamo due variabili x e y . Il punto chiave
sta nel fatto che l'integrando deve essere valutato
sul contorno d'integrazione, ciò implica una
relazione tra x e y , per cui i gradi di libertà
si riducono da due ad uno. Ovviamente, se
considerassimo un integrale su una curva in

n -dimensioni, allora le n -variabili soddisfanno $n-1$ condizioni.

Dobbiamo quindi esprimere x, y in $f(x, y)$, in termini di r che è il parametro che descrive il contorno d'integrazione. In coordinate polari si ha $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, e il cammino in questione ha $\theta = \pi/4$. Si noti comunque che in questo caso il passaggio è banale perché $f(x, y)$ è già espressa in termini di una sola variabile, e questa è proprio r :

$$f(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Analoghi analoghi vale per il secondo integrale

$$\int_{P_2}^{P_1} \vec{E}_- \cdot d\vec{s}$$

Poiché $\vec{E}_-$ è diretto verso x , si ha

$$\int_{P_2}^{P_1} q(x, y) \vec{u}_x \cdot d\vec{s}$$

Poiché l'integrando ha direzione $\vec{u}_x$ conviene scegliere il seguente cammino



nel cammino $P_2 P, y=0$

nel cammino $PP_1, x=d/2$

$$\int_{P_2}^{P_1} g(x,y) \vec{u}_x \cdot d\vec{s} = \int_{x(P_2)=d-a}^{x(P)=d/2} g(x,0) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x dx + \int_{y(P)=0}^{y(P_1)=d} g(d/2,y) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y dy$$

$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0$

$$= \int_{d-a}^{d/2} g(x,0) dx$$

Nel caso di E_- la funzione $g(x,y)$ è la costante $\sigma/2\epsilon_0$.