

PROBLEMI D'ESAME 5

24.05.2022

PROBLEMA 4

Un filo conduttore rettilineo indefinito è percorso dalla corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$, con $i_0 = 8\text{A}$

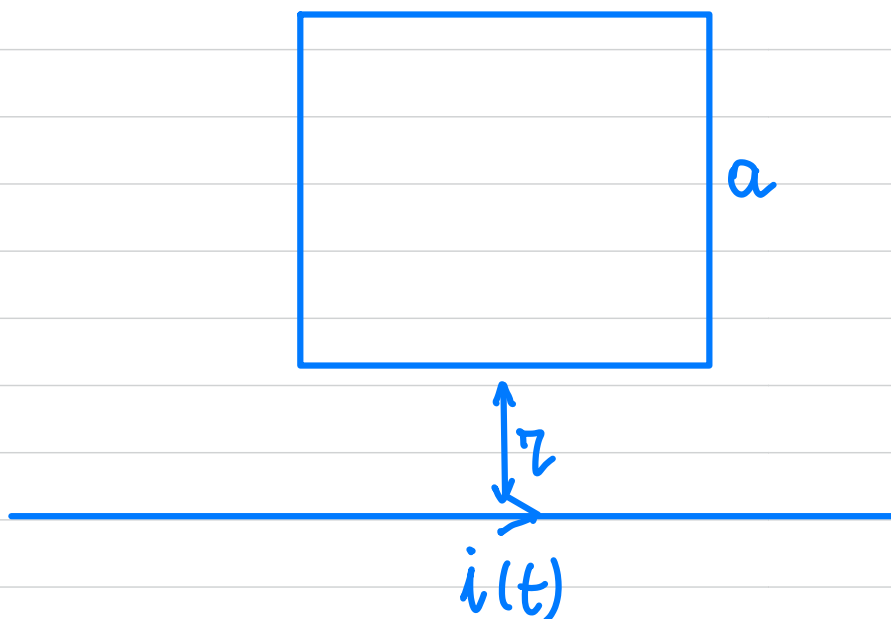
e $\tau = 5\text{ms}$. Una bobina quadrata conduttrice

composta da $N_b = 100$ spire di spessore trascurabile,

lato $a = 50\text{cm}$ e resistenza complessiva $R_b = 0.5\Omega$,

è posta a distanza $z = 5\text{cm}$ dal filo. Calcolare

1. il momento di dipolo magnetico delle bobine a $t=0$
2. la carica che percorre le bobine nell'intervallo $0 < t < \infty$
3. l'energia dissipata nelle bobine nell'intervallo $0 < t < \infty$



1. Il momento magnetico di una spira è
 $\vec{m} = i \Sigma \vec{u}_n$. Nel caso delle bobine si ha

$$M(t) = i_b(t) N_b \Sigma_b$$

dove $i_b(t)$ è la corrente indotta nelle bobine al tempo t . Per calcolare i_b è necessario prima calcolare il flusso di $\vec{B}$ attraverso le bobine

$$\begin{aligned} \phi(t) &= N_b \int_{\text{spira}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = N_b a \mu_0 \frac{i(t)}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{1}{r'} dr' \\ &= N_b \frac{\mu_0}{2\pi} a i(t) \ln \frac{r+a}{r} \end{aligned}$$

e la corrente indotta è

$$i_b(t) = -\frac{1}{R_b} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{N_b \mu_0 a}{2\pi R_b} \frac{i_0}{\tau} e^{-t/\tau} \ln \frac{r+a}{r}$$

da cui segue

$$M(0) = i_b(0) N_b \Sigma_b = \frac{N_b^2 \mu_0 a^3}{2\pi R_b} \frac{i_0}{\tau} \ln \frac{r+a}{r}$$

2. Il flusso all'istante finale è nullo poiché $i(\infty)=0$, e la legge di Faraday implica

$$q_b = \left| \frac{\phi(\infty) - \phi(0)}{R_b} \right| = 103 \mu\text{C}$$

3. L'energia è dissipata per effetto Joule

$$E_{\text{diss}} = \int_0^{\infty} R_b \dot{i}_b^2(t) dt = 0.53 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

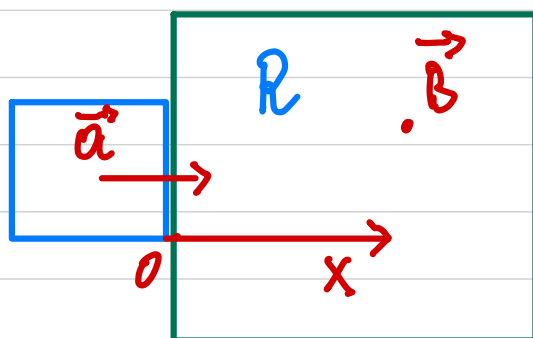
dove l'unico integrale da fare è

$$\int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{2}$$

PROBLEMA 5

Una spira quadrata di lato $d = 30 \text{ cm}$ e resistenza $R = 6 \text{ m}\Omega$ è al bordo di una regione R dove è presente un $\vec{B}$ uniforme perpendicolare e uscente dal foglio, con $B = 16 \text{ mT}$. La spira, inizialmente in quiete, subisce un'accelerazione $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ verso R costante nel tempo. Determinare

1. la f.e.m. massima indotta nella spira, $\mathcal{E}_{i, \text{max}}$
2. la carica che fluisce nella spira dal momento dell'accelerazione fino a quello in cui è completamente in R
3. l'energia dissipata nella spira



1. Denotiamo con $x(t)$ la posizione del lato destro della spira al tempo t , con $x(0) = 0$. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira è

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma(x(t))} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma(x(t))} B d\Sigma = B \int_{\Sigma(x(t))} d\Sigma = B dx(t)$$

dove $\Sigma(x(t))$ è la superficie della spira in R .

Del momento in cui la spira è completamente in R il flusso di $\vec{B}$ attraverso essa non varia (fino a quando la spira non esce da R). Quindi, definendo t_d tramite $x(t_d) = d$, si ha

$$\Phi_{\Sigma(x(t > t_d))} = \Phi_{\Sigma(d)}$$

cosicché per $t > t_d$ la f.e.m. indotta è nulla,

$$\mathcal{E}_i(t > t_d) = 0$$

mentre il suo modulo per $t \leq t_d$ è

$$\mathcal{E}_i(t) = \frac{d\Phi_z}{dt} = B d \frac{dx(t)}{dt} = B dv(t) = B da t$$

Quindi

$$\mathcal{E}_{i,max} = \mathcal{E}_i(t_d) = B da t_d$$

d'altronde, poiché per il moto uniformemente accelerato si ha

$$t_d = \sqrt{\frac{2d}{a}} \quad \left(x = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \right)$$

segue che

$$\mathcal{E}_{i,max} = B \sqrt{2ad^3} = 7.44 \text{ mV}$$

2. la carica che fluisce nel tempo dt è

$$dq = i dt$$

con

$$i = \frac{\mathcal{E} i}{R} = \frac{Bd}{R} \frac{dx}{dt}$$

da cui segue

$$dq = i dt = \frac{Bd}{R} \frac{dx}{dt} dt = \frac{Bd}{R} dx$$

e integrando

$$q = \int_0^d \frac{Bd}{R} dx = \frac{Bd^2}{R} = 0.24 C$$

I passaggi che hanno portato a questo risultato sono quelli della dimostrazione della legge di Faraday.

3. l'energia dissipata nell'intervallo dt è

$$\begin{aligned} dE_{\text{diss}} &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt = \frac{\left(Bd \frac{dx}{dt} \right)^2}{R} dt \stackrel{\frac{dx}{dt} dt = dx}{=} \frac{B^2 d^2}{R} v dx \\ &= \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2ax} dx \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} E_{\text{diss}} &= \int_0^d \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2ex} \, dx = \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2a} \int_0^d \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2a} \frac{2}{3} d^{3/2} = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

C'è comunque un modo molto più rapido di calcolare E_{diss} .

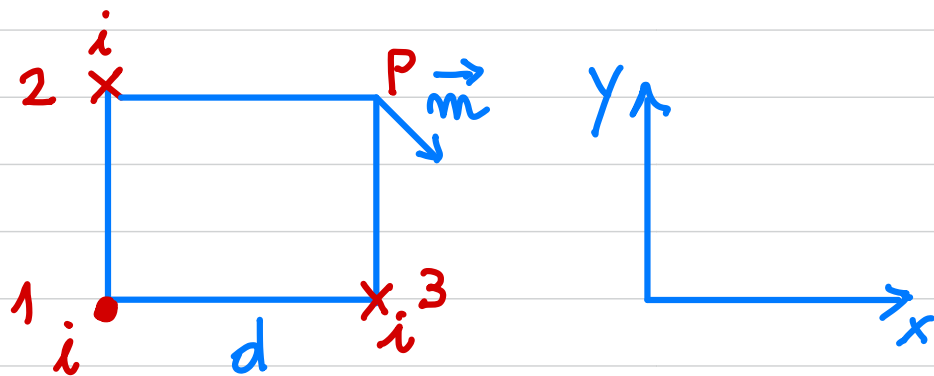
$$dE_{\text{diss}} = \frac{\xi_i^2}{R} dt, \quad \xi_i^2 = B^2 d^2 e^2 t^2$$

$$E_{\text{diss}} = \frac{B^2 d^2 e^2}{R} \int_0^d t^2 dt = \frac{B^2 d^2 e^2}{3R} \left(\frac{2d}{a} \right)^{3/2}$$

$$= \frac{\sqrt{8ad^7}}{3R} B^2 = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

PROBLEMA 6

Tre fili indefiniti percorsi dalla stessa corrente sono disposti su tre vertici di un quadrato di lato $d = 40 \text{ cm}$, la corrente nel filo 1 è uscente ed entrante nei fili 2 e 3. Nel quarto vertice, P, c'è una piccola spira di momento di dipolo magnetico di modulo $m = 6 \mu \text{ A m}^2$ parallelo al campo magnetico in P. L'energia potenziale associata alla spira è $U_m = -3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$.



Determinare

1. $|\vec{B}|$ in P
2. i
3. il valore che dovrebbe avere la corrente in 1 affinché $\vec{B}$ in P sia nullo

1. L'energia potenziale associata al momento magnetico di una spira $\vec{m}$ è

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta = -i \Sigma B \cos \theta$$

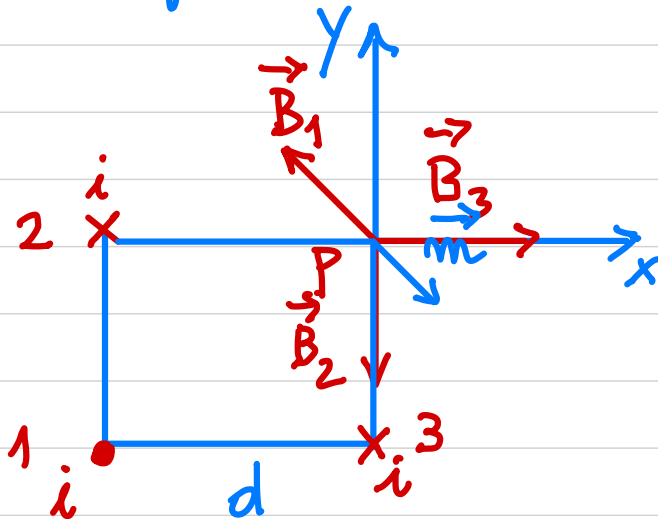
Nel caso in esame si ha

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB$$

→

$$B = -\frac{U_m}{m} = 0.5 \mu T$$

2. Il campo magnetico in P è



$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 i}{2\pi d\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} \vec{u}_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (-\vec{u}_x + \vec{u}_y) \quad 1)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_y \quad 2)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_x \quad 3)$$

Quindi, poiché $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$, si ha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$$

il cui modulo è

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sqrt{1 + 1} = \frac{\mu_0 i \sqrt{2}}{4\pi d}$$

da cui

$$i = \frac{4\pi B d}{\mu_0 \sqrt{2}} = 1.4 \text{ A}$$

3. Se in 1 circolo la corrente è i' allora, dalla 1),

segue che il campo dovuto a i' in P è

$$\vec{B}_1(i') = \frac{\mu_0 i'}{4\pi d} (-\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

e da 2) e 3) segue che

$$\vec{B} = \vec{B}_1(i') + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \vec{0}$$

la cui soluzione è

$$i' = 2i = 2.8 \text{ A}$$

PROBLEMA 7

Al centro di un solenoide ideale, con $n = 1000$ spire/m e resistenza $R_s = 2 \, \Omega$, è posta una bobina di resistenza $R_b = 0.4 \, \Omega$, coassiale al solenoide, composta da $N_b = 20$ spire, ciascuna di area $\Sigma_b = 10 \, \text{cm}^2$. Si chiude il circuito del solenoide su un generatore di f.e.m. e la corrente nel solenoide varia in modo che la potenza dissipata sulla bobina $P_R = 3 \cdot 10^{-8} \, \text{W}$ sia costante. Determinare

1. la rapidità di variazione del campo magnetico del solenoide dB/dt
2. il momento di dipolo magnetico della bobina in
3. l'energia dissipata per effetto Joule sul solenoide nel tempo $T = 3 \, \text{s}$ E_{diss}

1. Sia $\mathcal{E}_i$ la f.e.m. indotta nella bobina dalla variazione del campo magnetico del solenoide

$$P_R = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R_b} \rightarrow \mathcal{E}_i = \sqrt{P_R R_b}$$

D'altronde

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = N_b \Sigma_b \frac{dB}{dt}$$

da cui

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\mathcal{E}_i}{N_b \Sigma_b} = \frac{\sqrt{P_R R_b}}{N_b \Sigma_b} = 5.5 \text{ mT/s} \quad 1)$$

2. Il momento di dipolo magnetico della bobina è

$$M = i_b N_b \Sigma_b = \frac{\mathcal{E}_i}{R_b} N_b \Sigma_b = \sqrt{\frac{P_R}{R_b}} N_b \Sigma_b = 5.5 \cdot 10^{-6} \text{ A m}^2$$

3. L'energia dissipata nel solenoide per effetto Joule è

$$E_{\text{diss}} = \int_0^{\tau} R_s i_s^2 dt$$

D'altronde il modulo del campo magnetico nel solenoide è $B = \mu_0 n i_s$, quindi, utilizzando le 1),

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0 n \frac{di_s}{dt} = 5.5 \text{ mT/s}$$

cioè

$$k := \frac{di_s}{dt} = \frac{1}{\mu_0 n} \frac{dB}{dt} = 4.36 \text{ A/s}$$

Si ha quindi

$$i_s = \int_0^t \frac{di_s}{dt'} dt' = k \int_0^t dt' = kt$$

da cui segue

$$E_{\text{diss}} = \int_0^{\tau} R_s (kt)^2 dt = \frac{R_s k^2 \tau^3}{3} = 342 \text{ J}$$