

PROBLEMI D'ESAME 4

23.05.2022

PROBLEMA 1

Due condensatori di capacità $C_1 = 20 \text{ nF}$ e $C_2 = 18 \text{ nF}$ e due resistori $R_1 = 50 \Omega$ e $R_2 = 100 \Omega$ sono collegati ad un generatore che fornisce la f.e.m. $\mathcal{E}$. Con l'interruttore T chiuso nel sistema di condensatori è immagazzinata a regime ^{fine carica} l'energia elettrostatica $U_e = 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$. Calcolare

1. $\mathcal{E}$

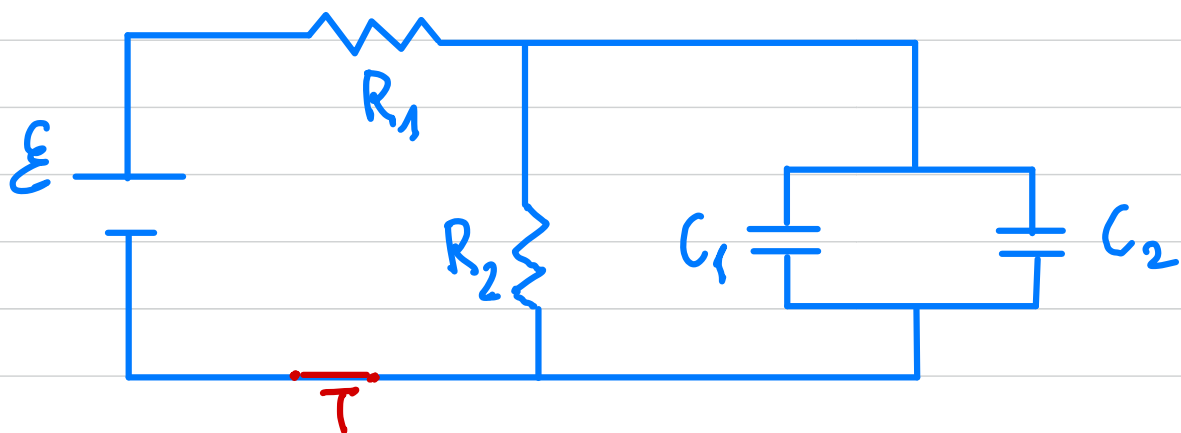
lo spazio interno a C_2 viene completamente riempito con un dielettrico con $\kappa = 3$. Calcolare

2. la variazione di energia elettrostatica

3. la carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico

T viene aperto e il sistema inizia a scaricarsi. Calcolare

4. il tempo in cui si dimezza l'energia elettrostatica del sistema



1. È utile ricordare le espressioni di carica e scarica di un condensatore nel caso di un circuito RC

CARICA

$$q(t) = C \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}), \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC})$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}, \quad V_R(t) = R i(t) = \mathcal{E} e^{-t/RC}$$

SCARICA

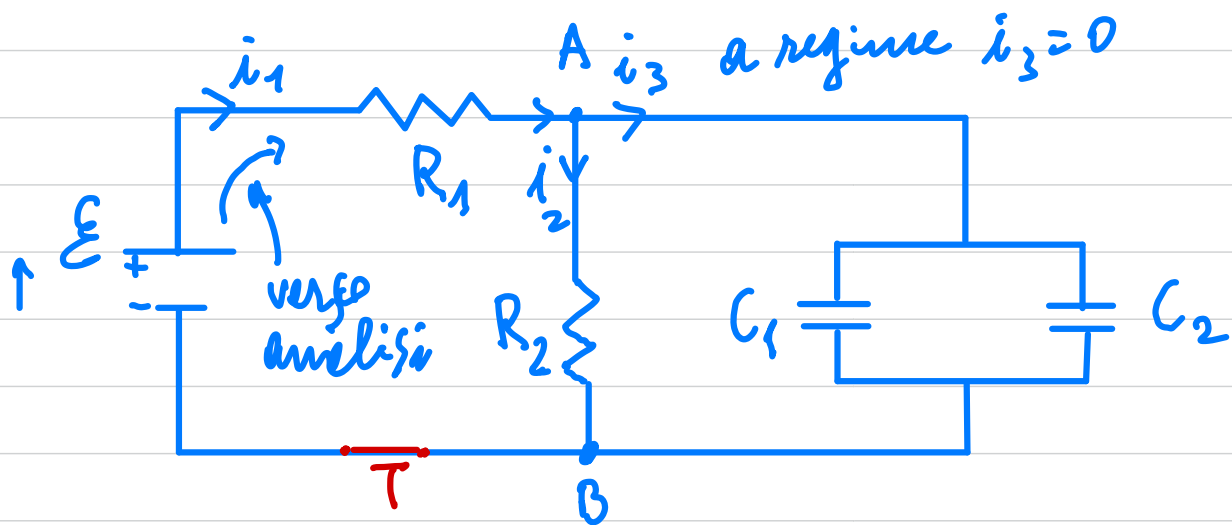
$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}, \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC}$$

$$i(t) = - \frac{dq(t)}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R}$$

dove $q_0 = C \mathcal{E}$ è la carica iniziale del condensatore ($t=0$)

Comunque, nel caso del problema il circuito è diverso da un semplice circuito R.C.

D'altronde, anche in questo caso, a fine carica la corrente circolante ai capi dei condensatori è nulla. Questo significa che a regime la corrente circola solo nelle maglie puramente resistive



NODO A:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad i_3 = 0 \rightarrow i_2 = i_1 \quad 1)$$

MAGLIA RESISTIVA:

$$\cancel{V_B} + \mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 = \cancel{V_B} \quad 2)$$

1) + 2)

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \quad 3) \text{ dove } i \equiv i_1 = i_2$$

MAGLIA CONDENSATORI: non ci sono correnti.

Comunque, poiché i conduttori sono equipotenziali, si ha $V_A - V_B = \text{d.d.p. ai capi dei condensatori}$; scegliendo $V_B = 0$

$$V_A = V_C$$

D'altronde $V_A = \mathcal{E} - i_1 R_1$, ed avendo denotato i_1 con i , si ha, usando la 3): $i = \mathcal{E} / (R_1 + R_2)$,

$$V_C = \mathcal{E} - i R_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

cioè

$$V_C = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Si noti che i due condensatori sono in parallelo, per cui le capacità equivale

lente è

$$C = C_1 + C_2$$

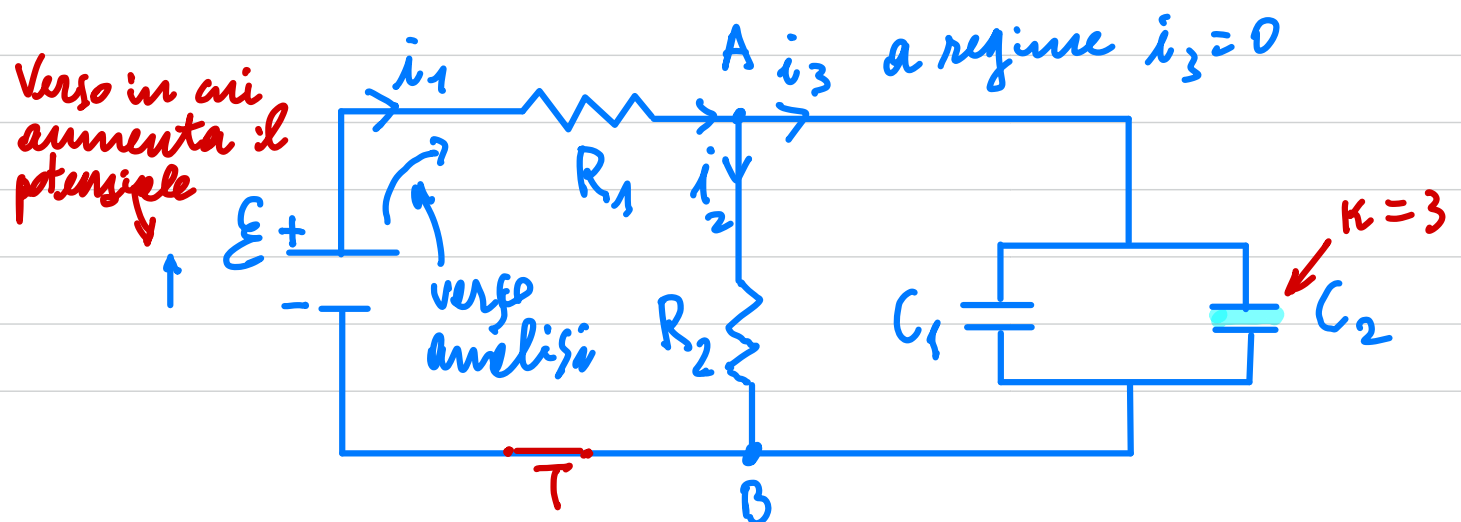
per cui l'energia elettrostatica dei condensatori è

$$U_e = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V_C^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(\mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2$$

quindi

$$\mathcal{E} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \sqrt{\frac{2 U_e}{C_1 + C_2}} = 150 \text{ V}$$

2. Nella nuova configurazione il condensatore di capacità C_2 è riempito da un dielettrico con $K=3$



Questo è l'unico cambiamento, per cui

$$\Delta U_e = U_{e,f} - U_{e,i} = \frac{1}{2} (\kappa C_2 - C_2) V_C^2 = \frac{C_2 (\kappa - 1)}{2} V_C^2 = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

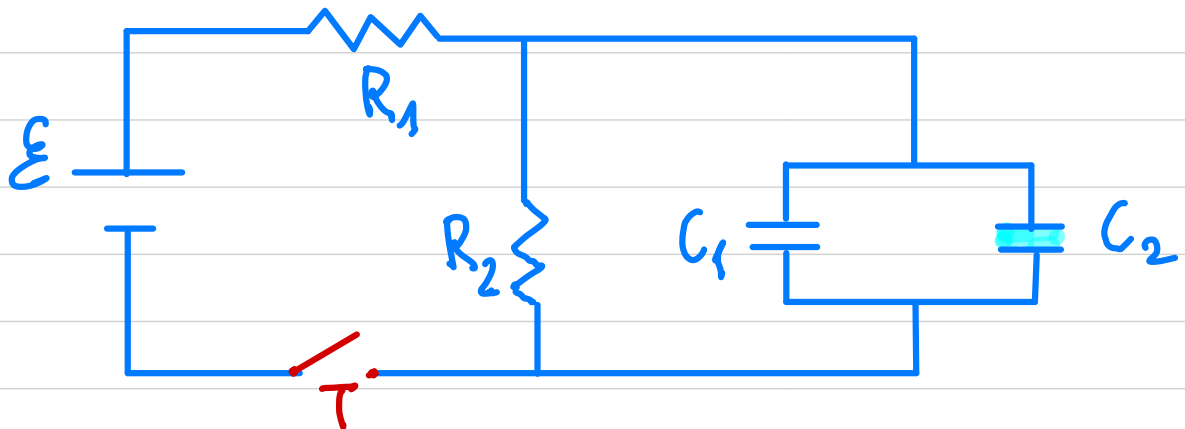
3. la carica del condensatore con il dielettrico è

$$q_2 = \kappa C_2 V_C$$

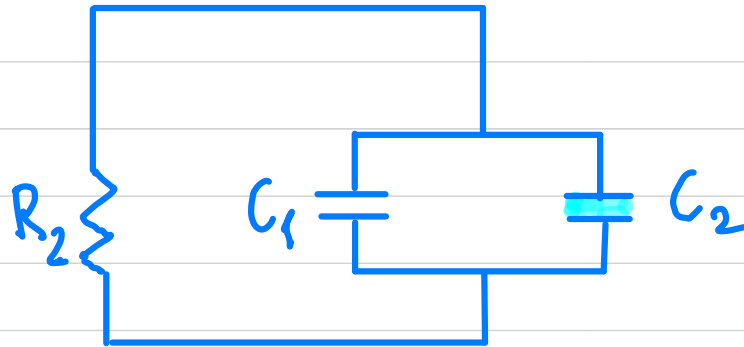
quindi

$$q_{2,p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q_2 = (\kappa - 1) C_2 V_C = 3.6 \mu\text{C}$$

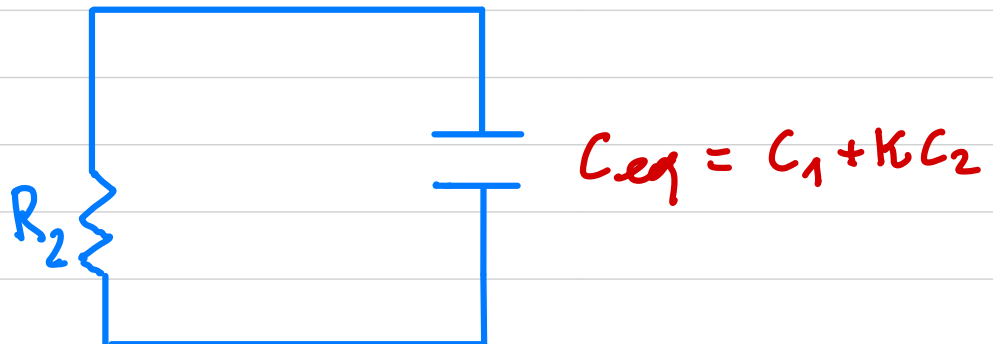
4. Ora l'interruttore è aperto



Questo circuito è equivalente al circuito RC
in fase di scarica



a sua volta equivalente a



Notazione:

U_0, q_0 : energia elettrostatica e carica all'istante
iniziale

$U_{1/2}, q_{1/2}$: energia elettrostatica e carica all'istante $t_{1/2}$

Si ha

$$2 = \frac{U_0}{U_{1/2}} = \frac{q_0^2 / (2C_{eq})}{q_{1/2}^2 / (2C_{eq})} = \left(\frac{q_0}{q_{1/2}} \right)^2$$

dove $C_{eq} = C_1 + K C_2$.

D'altronde

$$q_{1/2} = q_0 e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}}, \quad \tau := R_2 C_{eq} = 7.4 \mu s$$

Quindi

$$e^{2 \frac{t_{1/2}}{\tau}} = 2 \rightarrow$$

$$\ln e^{2 t_{1/2} / \tau} = \ln 2 \rightarrow 2 \frac{t_{1/2}}{\tau} = \ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{\tau}{2} \ln 2 = 2.56 \mu s$$

PROBLEMA 2

All'istante $t_0 = 0$ un elettrone si trova tra due piani paralleli indefiniti con densità di carica $\sigma > 0$ e $-\sigma$, che si muove con velocità

$$v_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

parallela ai piani e posto a metà tra loro.

Sapendo che dopo $t = 0.4 \mu\text{s}$ l'elettrone urta il piano carico positivamente con velocità di modulo

$$v_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

determinare

1. σ

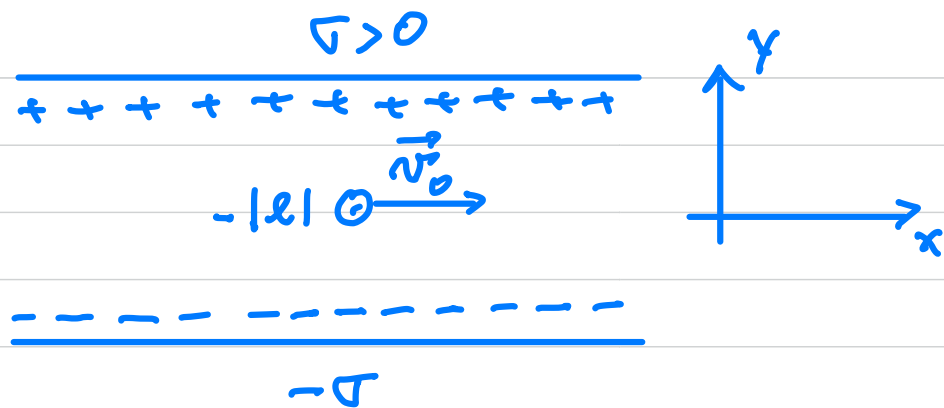
2. la d.d.p. tra i piani

3. la distanza tra i piani

Carica dell'elettrone $-|e| = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Massa dell'elettrone $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$

la notazione $-|e|$ elimina l'ambiguità dovuta alla scelta del segno di e . Per esempio, il libro di testo definisce e negativa ma poi lo considera sempre positivo



1. La forza agente sull'elettrone è

$$\vec{F} = -|e|\vec{E} = -|e|\frac{\sigma}{\epsilon_0}(-1)\vec{u}_y = |e|\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_y$$

e dalla II legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{|e|\sigma}{m\epsilon_0}\vec{u}_y$$

il cui modulo è una costante. Si ha quindi

$v_{1,x} = v_0 = \text{costante}$: Il moto lungo $\vec{x}$ non è alterato da $\vec{E}$

$$v_{1,y} = at = \frac{|e|\sigma}{m\epsilon_0}t \quad 1)$$

$$v_{1,y} = \sqrt{v_1^2 - v_{1,x}^2} = \sqrt{v_1^2 - v_0^2} = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e la 1) implica

$$\sigma = \left| \frac{m \epsilon_0 v_{1,y}}{e t} \right| = 50.4 \frac{\mu C}{m^2}$$

2.

$$E_{\text{finale}} = E_{\text{iniziale}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 \rightarrow$$

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2)$$

Dell'elettrone $U = qV$. Ricordando che V dipende linearmente dalle distanze, si ha che la differenza di potenziale tra la posizione iniziale dell'elettrone e uno dei due piani è la metà, a meno di un segno, della d.d.p. tra i due piani carichi.

Quindi

$$-(-|e|) \frac{\Delta V}{2} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

da cui

$$\Delta V = \frac{m}{|e|} (v_1^2 - v_0^2) = 0.91 \text{ V}$$

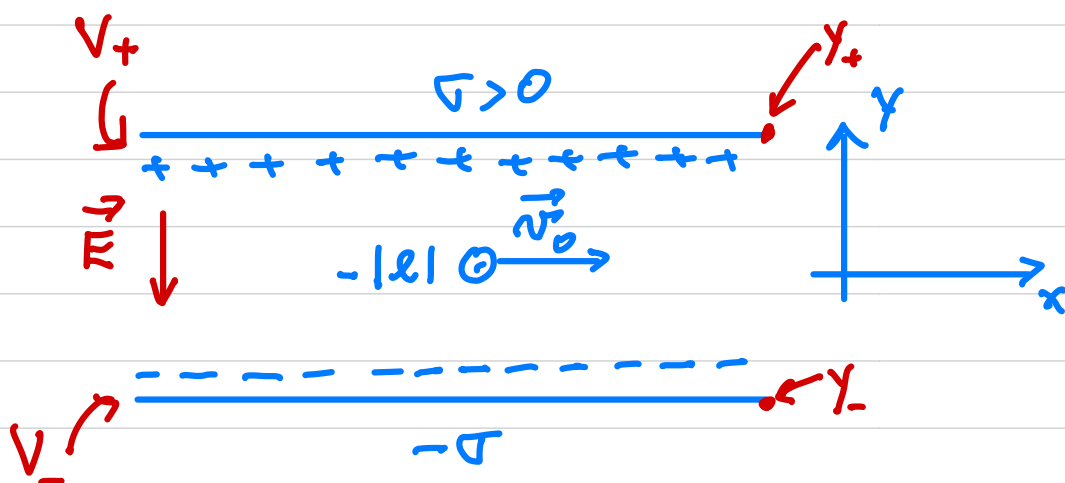
3. Si ha

$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

per cui

$$d = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{\sigma} = 16 \text{ cm}$$

Un commento sul segno di ΔV :

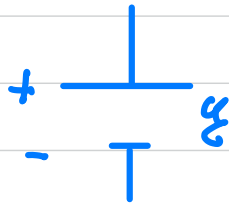


$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-1) \vec{u}_y \rightarrow V_+ - V_- = - \int_{y_-}^{y_+} \vec{E} \cdot d\vec{y}$$

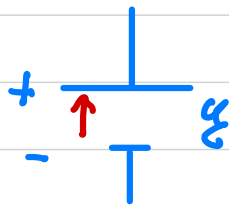
$$= + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{y_-}^{y_+} dy = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (y_+ - y_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d > 0$$

Quindi $V_+ = V_- + \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$, il che implica che il potenziale in Y_+ è maggiore che in Y_- .

Questo aspetto spiega anche come mai nel simbolo



il verso di crescita della d.d.p. è da - a +



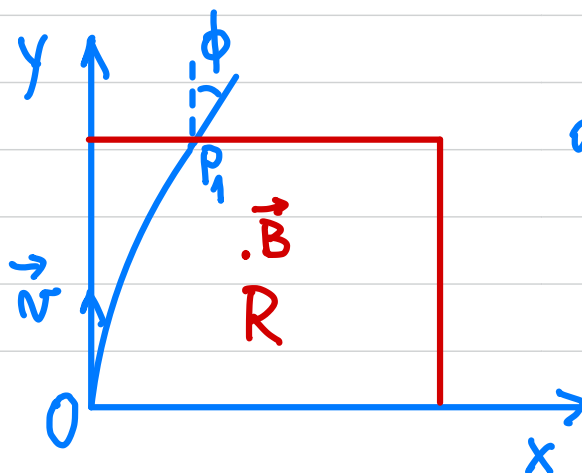
Aspetto che spiega il segno + nel calcolo dei potenziali nell'analisi dei circuiti elettrici.

Nel seguito consideriamo $\epsilon > 0$.

PROBLEMA 3

Un fascio di protoni, $\frac{e}{m_p} = 10^8 \text{ C/kg}$, inizialmente a riposo, è accelerato da una d.d.p. $V = 1.25 \text{ kV}$ e subito dopo entra, con velocità $\vec{v} = v\vec{u}_y$ in O , origine degli assi cartesiani, in una regione di spazio R in cui vi è un campo magnetico $B = 7 \text{ mT}$ uniforme e perpendicolare alle traiettorie dei protoni. Il fascio esce dalla regione R nel punto P_1 deflesso dell'angolo $\phi = 30^\circ$ rispetto alla direzione iniziale. Determinare

1. Le coordinate di P_1
2. Il tempo impiegato a percorrere la traiettoria OP_1
3. L'energia cinetica che dovrebbe avere in O un fascio di deuteroni, $e/m_d = e/(2m_p)$ per percorrere la stessa traiettoria OP_1



deutrone: nucleo
del deuterio $n + p$

$$m_n \sim m_p$$

$$1. \ln 0 \quad \frac{1}{2} m_p v^2 = eV$$

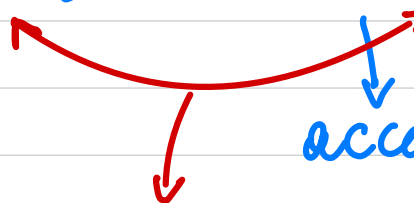
$$\rightarrow v = \sqrt{2 \frac{e}{m_p} V} = 5 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

inoltre, il raggio dell'arco di cerchio delle traiettorie è

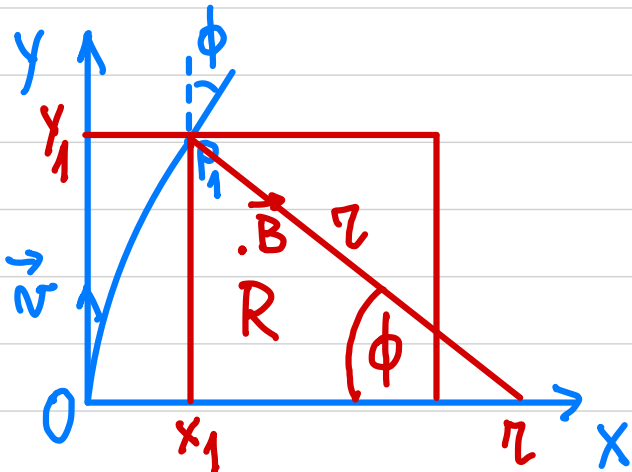
$$r = \frac{m_p v}{e B} = 0.71 m$$

come segue dalle forze di Lorentz

$$F_L = q v B = m a = m \frac{v^2}{r}$$



$$\rightarrow q B = m \frac{v}{r} \rightarrow r = \frac{m v}{q B}$$



$$x_1 = r (1 - \cos \phi) = 9.6 \text{ cm}$$

$$y_1 = r \sin \phi = 35.7 \text{ cm}$$

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

2. Si noti che la lunghezza di un arco di circonferenza è ϕr , con ϕ espresso in radianti (lunghezza circonferenza = $2\pi r$), quindi

$$l_{\text{arco}} = 2\pi \frac{60}{360} r = \frac{\pi}{3} r$$
. Quindi il tempo richiesto è

$$t = \frac{l_{\text{arco}}}{v} = \frac{\phi r}{v} = \frac{\pi r}{3v} = 0.75 \mu s$$

3. Per percorrere le stesse traiettorie, protoni e deutoni, si noti che la carica del deutone è la stessa di quella del protone, ma di massa doppia. Ripetendo lo stesso conto fatto nel punto 2. da

$$r_d = \frac{m_d v_d}{e B}$$

affinché questo sia uguale al raggio

della traiettoria è necessario che

$$m_d v_d = m_p v_p$$

ciò che i deutoni devono avere la stessa quantità di moto. D'altronde

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2mE}$$

Quindi

$$p_p = \sqrt{2m_p E_p} = p_d = \sqrt{2m_d E_d}$$

→

$$E_d = \frac{m_p}{m_d} E_p = \frac{1}{2} E_p = 625 \text{ eV}$$

PROBLEMA 4

Un filo conduttore rettilineo indefinito è percorso dalla corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$, con $i_0 = 8\text{A}$

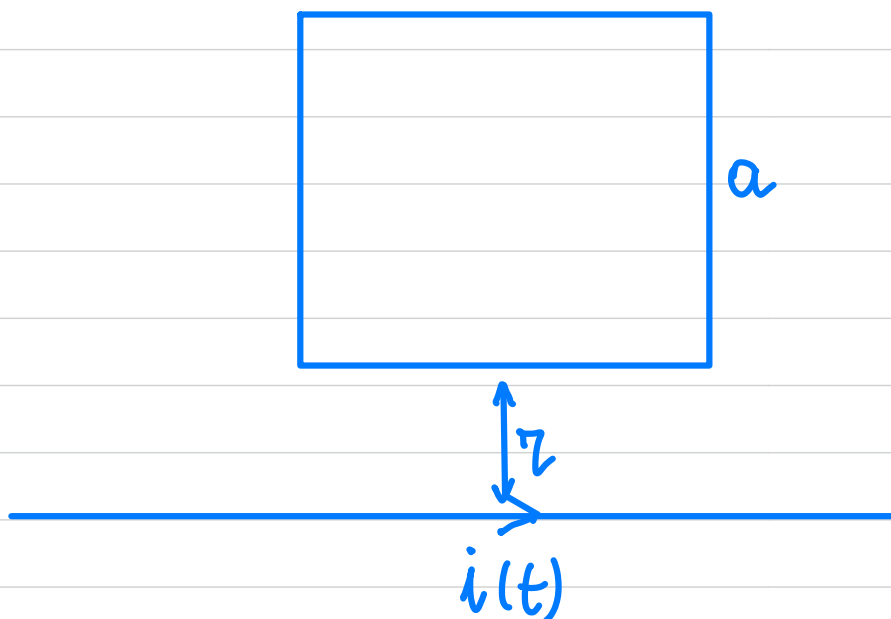
e $\tau = 5\text{ms}$. Una bobina quadrata conduttrice

composta da $N_b = 100$ spire di spessore trascurabile,

lato $a = 50\text{cm}$ e resistenza complessiva $R_b = 0.5\Omega$,

è posta a distanza $z = 5\text{cm}$ dal filo. Calcolare

1. il momento di dipolo magnetico delle bobine a $t=0$
2. la carica che percorre le bobine nell'intervallo $0 < t < \infty$
3. l'energia dissipata nelle bobine nell'intervallo $0 < t < \infty$



1. Il momento magnetico di una spira è
 $\vec{m} = i \Sigma \vec{u}_n$. Nel caso delle bobine si ha

$$M(t) = i_b(t) N_b \Sigma_b$$

dove $i_b(t)$ è la corrente indotta nelle bobine al tempo t . Per calcolare i_b è necessario prima calcolare il flusso di $\vec{B}$ attraverso le bobine

$$\begin{aligned} \phi(t) &= N_b \int_{\text{spira}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = N_b \mu_0 i(t) \int_r^{r+a} \frac{1}{r'} dr' \\ &= N_b \frac{\mu_0}{2\pi} a i(t) \ln \frac{r+a}{r} \end{aligned}$$

e la corrente indotta è

$$i_b(t) = -\frac{1}{R_b} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{N_b \mu_0 a}{2\pi R_b} \frac{i_0}{\tau} e^{-t/\tau} \ln \frac{r+a}{r}$$

da cui segue

$$M(0) = i_b(0) N_b \Sigma_b = \frac{N_b^2 \mu_0 a^3}{2\pi R_b} \frac{i_0}{\tau} \ln \frac{r+a}{r}$$

2. Il flusso all'istante finale è nullo poiché $i(\infty)=0$, e la legge di Faraday implica

$$q_b = \left| \frac{\phi(\infty) - \phi(0)}{R_b} \right| = 103 \mu C$$

3. L'energia è dissipata per effetto Joule

$$E_{diss} = \int_0^{\infty} R_b \dot{i}_b^2(t) dt = 0.53 \cdot 10^{-6} J$$

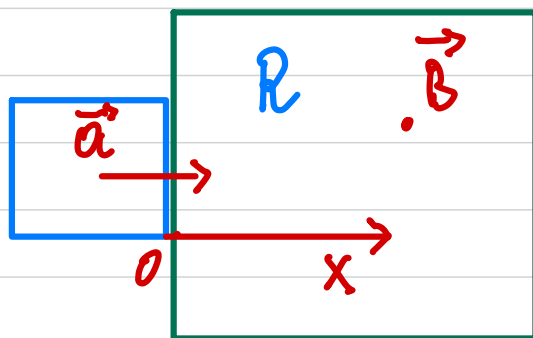
dove l'unico integrale da fare è

$$\int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{2}$$

PROBLEMA 5

Una spira quadrata di lato $d = 30 \text{ cm}$ e resistenza $R = 6 \text{ m}\Omega$ è al bordo di una regione R dove è presente un $\vec{B}$ uniforme perpendicolare e uscente dal foglio, con $B = 16 \text{ mT}$. La spira, inizialmente in quiete, subisce un'accelerazione $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ verso R . Determinare

1. la f.e.m. massima indotta nella spira, $\mathcal{E}_{i, \text{max}}$
2. la carica che fluisce nella spira dal momento dell'accelerazione fino a quello in cui è completamente in R
3. l'energia dissipata nella spira



1. Denotiamo con $x(t)$ la posizione del lato destro della spira al tempo t , con $x(0) = 0$.

Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} B d\Sigma = \int_{\Sigma(x(t))} B d\Sigma = B \int_{\Sigma(x(t))} d\Sigma = B a x(t)$$

Σ è la superficie della spira in $\mathbb{R}$, questa dipende da $x(t)$

Sia t_d l'istante in cui $x = d$, cioè $x(t_d) = d$. Si

$$\text{ha } \Phi_{\Sigma(x(t > t_d))} = \Phi_{\Sigma(d)}.$$

Il modulo della f.e.m. indotta è, per $t \leq t_d$

$$\mathcal{E}_i(t) = \frac{d\Phi}{dt} = B d \frac{dx(t)}{dt} = B d v(t)$$

Si noti che fino al tempo t_d si ha

$$\mathcal{E}_i(t \leq t_d) = B d v(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{accelerazione costante}}}{B d a t}$$

mentre per $t > t_d$ si ha

$$\mathcal{E}_i(t > t_d) = 0$$

in quanto, per $t > t_d$, il flusso è costante. Si ha quindi

$$\mathcal{E}_{i, \max} = \mathcal{E}_i(t_d) = B d a t_d$$

d'altronde, poiché per il moto uniformemente accelerato si ha

$$t_d = \sqrt{\frac{2d}{a}} \quad \left(x = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \right)$$

segue che

$$\mathcal{E}_{i, \max} = B \sqrt{2 a d^3} = 7.44 \text{ mV}$$

2. la carica che fluisce nel tempo dt è

$$dq = i dt$$

con

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bd}{R} \frac{dx}{dt}$$

da cui segue

$$dq = i dt = \frac{Bd}{R} \frac{dx}{dt} dt = \frac{Bd}{R} dx$$

e integrando

$$q = \int_0^d \frac{Bd}{R} dx = \frac{Bd^2}{R} = 0.24 C$$

che segue direttamente dalla legge di Faraday.

3. l'energia dissipata nell'intervallo dt è

$$\begin{aligned} dE_{\text{diss}} &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt = \frac{\left(Bd \frac{dx}{dt}\right)^2}{R} dt \stackrel{\frac{dx}{dt} dt = dx}{=} \frac{B^2 d^2}{R} v dx \\ &= \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2ax} dx \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} E_{\text{diss}} &= \int_0^d \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2ex} \, dx = \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2a} \int_0^d \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{B^2 d^2}{R} \sqrt{2a} \frac{2}{3} d^{3/2} = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

C'è comunque un modo molto più rapido di calcolare E_{diss} .

$$dE_{\text{diss}} = \frac{\xi_i^2}{R} dt, \quad \xi_i^2 = B^2 d^2 e^2 t^2$$

$$E_{\text{diss}} = \frac{B^2 d^2 e^2}{R} \int_0^d t^2 dt = \frac{B^2 d^2 e^2}{3R} \left(\frac{2d}{a} \right)^{3/2}$$

$$= \frac{\sqrt{8ad^7}}{3R} B^2 = 1.19 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$